

Suites (II) — Limite de q^n

TERMINALE

1 Limite de q^n

Propriété

Soit q un réel. La limite de la suite (q^n) dépend de la valeur de q :

- si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$;
- si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;
- si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$;
- si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Méthode

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,5)^n = +\infty$ car $1,5 > 1$, tandis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$.

2 Inégalité de Bernoulli

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $n \geq 0$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Cette inégalité justifie que $q^n \rightarrow +\infty$ lorsque $q > 1$ (en posant $q = 1 + a$ avec $a > 0$).

Méthode

Exemple : Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli (pour $a > 0$ fixé).

Initialisation ($n = 0$) : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Comme $1 + a > 0$:

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2.$$

Or $na^2 \geq 0$, donc $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

3 Suites géométriques et limite

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 : pour tout n , $u_n = u_0 q^n$. Sa limite se déduit de celle de q^n , en tenant compte du signe de u_0 .

Méthode

Exemple : La suite $u_n = 3 \times (0,5)^n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 \times 0 = 0$.
 La suite $v_n = 2 \times (1,2)^n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,2)^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

4 Somme de termes d'une suite géométrique**Propriété**

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geq 0$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $-1 < q < 1$, alors $q^{n+1} \rightarrow 0$ et cette somme tend vers $\frac{1}{1 - q}$.

Méthode

Exemple : Calculer $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ puis sa limite.

Avec $q = \frac{1}{2}$:

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$.

À retenir

q^n : le comportement se lit selon la position de q par rapport à -1 et 1 .

Bernoulli : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (se démontre par récurrence).

Somme géométrique : $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, de limite $\frac{1}{1 - q}$ lorsque $|q| < 1$.