

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

— TERMINALE – MATHS COMPLÉMENTAIRES —

1. APPROCHE HISTORIQUE ET DÉFINITION

Au XVII^e siècle, **Neper** invente les logarithmes pour transformer les **produits** en **sommes** et simplifier les calculs des astronomes.

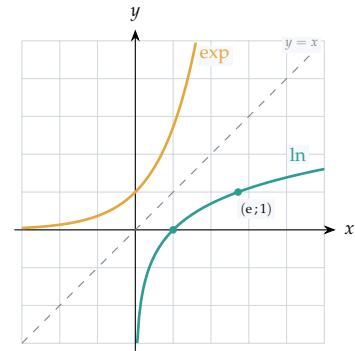
Définition

Pour tout $x > 0$, l'équation $e^y = x$ a une unique solution, notée $\ln x$. La fonction $\ln$ est la **réciproque** de la fonction exponentielle.

$$\text{pour } x > 0 : e^y = x \iff y = \ln x$$

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0) \quad \ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Équations : $e^{2x-1} = 5 \iff x = \frac{1+\ln 5}{2}$ $\ln x = 3 \iff x = e^3$ $e^x = -2$: aucune solution.



Courbes de $\ln$ et $\exp$ symétriques par rapport à $y = x$.

2. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

Signe et comparaison ($a > 0, b > 0$)

$$\begin{aligned} \ln a = \ln b &\iff a = b & \ln a < \ln b &\iff a < b \\ \ln x < 0 &\iff 0 < x < 1 & \ln x > 0 &\iff x > 1 \end{aligned}$$

- $\ln$ est **strictement croissante** et **concave** sur $]0; +\infty[$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (asymptote $x = 0$) ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$;
- croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Exemple : $f(x) = x - 2 \ln x$; $f'(x) = \frac{x-2}{x}$, minimum $f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61 > 0$.

3. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour $a > 0, b > 0$ et n entier :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{b} &= \ln a - \ln b & \ln \frac{1}{a} &= -\ln a \\ \ln(a^n) &= n \ln a & \ln \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \ln a \end{aligned}$$

$$\ln 50 - 2 \ln 5 + \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{50}{25 \times 2} = \ln 1 = 0.$$

Seuil : résoudre $q^n \geq k$

$q^n \geq k \iff n \ln q \geq \ln k$, puis on divise par $\ln q$.

$$1,03^n \geq 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \approx 23,4 : n = 24.$$

Si $0 < q < 1, \ln q < 0$: **l'inégalité change de sens.**

$$0,8^n < 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6 : n \geq 21.$$

Échelle logarithmique : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$; amplitude $\times 10 \Rightarrow$ magnitude de Richter +1.

4. MÉTHODES TYPES

Résoudre une équation

- isoler l'exponentielle ou le logarithme ;
- $e^X = k$ ($k > 0$) $\iff X = \ln k$;
 $\ln X = k \iff X = e^k$;
- vérifier que la solution est dans le domaine ($X > 0$ pour $\ln X$).

Résoudre une inéquation

- appliquer $\ln$ ou $\exp$, qui sont **croissantes** : le sens est conservé ;
- diviser par un nombre **néglatif** (comme $\ln 0,8$) : le sens **change** ;
- conclure par un intervalle.

Demi-vie, doublement

Capital à 3 % : doublement quand $1,03^n \geq 2$, soit 24 ans.

$$\text{Iode 131 (perte de 8,3 \% / jour)} : 0,917^n \leq 0,5 \iff n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,917} \approx 8 \text{ jours.}$$

À RETENIR

⊙ $e^y = x \iff y = \ln x$
($x > 0$) ; $\ln 1 = 0$,
 $\ln e = 1$.

⊙ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\ln$
strictement croissante.

⊙ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$;
 $\ln(a^n) = n \ln a$.

⌋ Seuil : $q^n \geq k \iff$
 $n \ln q \geq \ln k$.

⊙ $\ln q < 0$ si $q < 1$;
 $\ln(a+b) \neq$
 $\ln a + \ln b$.