

Fonction logarithme népérien

Approche historique, définition, étude, propriétés algébriques

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Approche historique et définition

Un peu d'histoire

Au début du XVII^e siècle, l'Écossais John **Napier** (Neper) cherche à simplifier les calculs des astronomes : transformer les **multiplications** (longues) en **additions** (rapides). Ses tables de logarithmes associent à chaque nombre un « logarithme » tel que $\log(ab) = \log a + \log b$. Elles seront utilisées pendant plus de trois siècles, jusqu'à l'arrivée des calculatrices.

Logarithme népérien

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution réelle y (la fonction exponentielle est continue, strictement croissante, et prend toutes les valeurs de $]0; +\infty[$). Cette solution est notée $\ln x$:

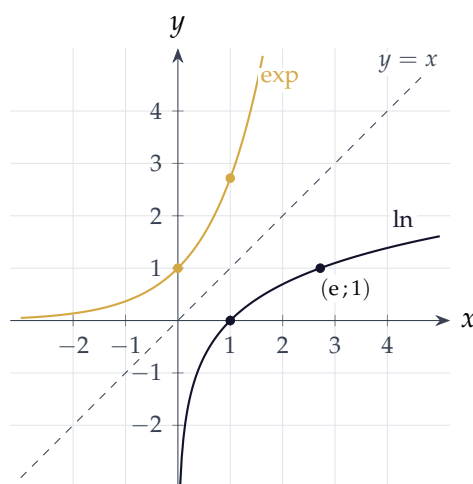
$$\text{pour } x > 0 : e^y = x \iff y = \ln x$$

La fonction $\ln : x \mapsto \ln x$, définie sur $]0; +\infty[$, est la **fonction logarithme népérien**. C'est la **réciproque** de la fonction exponentielle.

Conséquences immédiates

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0) \quad \ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Les courbes de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Méthode — résoudre une équation avec l'exponentielle

Exemple : $e^{2x-1} = 5 \iff 2x - 1 = \ln 5 \iff x = \frac{1 + \ln 5}{2} \approx 1,30.$

Exemple : $\ln(x) = 3$ sur $]0; +\infty[\iff x = e^3 \approx 20,1.$

Exemple : $e^x = -2$: aucune solution, car une exponentielle est toujours strictement positive.

2 Étude de la fonction logarithme

Dérivée, variations, limites

- $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; plus généralement, si $u > 0$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Comme $\frac{1}{x} > 0$, $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, et **concave** ($(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$).
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- Croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (« x l'emporte sur $\ln x$ »).

Signe et comparaison

Pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \iff a = b$ $\ln a < \ln b \iff a < b$.
 En particulier : $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \iff x > 1$.

Méthode — étudier une fonction avec $\ln$

Exemple : $f(x) = x - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$, du signe de $x-2$ car $x > 0$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$2 - 2 \ln 2$	

Minimum $f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61 > 0$: donc $f(x) > 0$, c'est-à-dire $x > 2 \ln x$ pour tout $x > 0$.

3 Propriétés algébriques

Règles de calcul (pour $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Méthode — simplifier une expression

Exemple : $A = \ln 50 - 2 \ln 5 + \ln \frac{1}{2} = \ln 50 - \ln 25 - \ln 2 = \ln \frac{50}{25 \times 2} = \ln 1 = 0$.

Exemple : $B = \ln(e^3) + \ln \sqrt{e} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Méthode — résoudre $q^n > k$ (seuil d'une suite géométrique)

Exemple : Un capital placé à 3 % par an double-t-il en moins de 25 ans ? On cherche n tel que $1,03^n \geq 2$.

$$1,03^n \geq 2 \iff \ln(1,03^n) \geq \ln 2 \iff n \ln(1,03) \geq \ln 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \approx 23,4$$

On a divisé par $\ln 1,03 > 0$ (car $1,03 > 1$) : le sens de l'inégalité est conservé. Réponse : $n = 24$ ans.

Attention : si $0 < q < 1$, alors $\ln q < 0$ et diviser par $\ln q$ **change le sens** de l'inégalité.

Exemple : $0,8^n < 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$, donc $n \geq 21$.

Méthode — échelle logarithmique (séismes)

Exemple : La magnitude de Richter d'un séisme est $M = \log(A) + c$, où $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ est le **logarithme décimal** ($\log 10^k = k$) et A l'amplitude mesurée.

Si l'amplitude est multipliée par 10 : $\log(10A) = \log 10 + \log A = 1 + \log A$, la magnitude augmente de 1 seul point. Un séisme de magnitude 7 a une amplitude $10^2 = 100$ fois plus grande qu'un séisme de magnitude 5.

À retenir

- Pour $x > 0$: $e^y = x \iff y = \ln x$; $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$: $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\ln(a^n) = n \ln a$ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- Seuil : $q^n \geq k \iff n \ln q \geq \ln k$, puis on divise par $\ln q$.
- **Piège :** si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$: diviser par $\ln q$ **renverse** l'inégalité. Et $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$!