

ÉVOLUTION : MODÈLES CONTINUS

— TERMINALE — MATHS COMPLÉMENTAIRES —

1. LIMITE D'UNE FONCTION

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$: la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale** ;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$: la droite $x = a$ est **asymptote verticale**.

Limites de référence

$$x^n, \sqrt{x} \rightarrow +\infty \text{ en } +\infty \quad \frac{1}{x^n} \rightarrow 0 \text{ en } \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Croissances comparées : } \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty, \quad x e^{-x} \rightarrow 0 \text{ en } +\infty.$$

$$k > 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$$

C'est ce terme qui fait **converger** les modèles d'évolution.

Exemples : $f(t) = 20 + 70e^{-0,1t} \rightarrow 20$: asymptote $y = 20$.

$g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$: $g(x) \rightarrow 2$ en $+\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$ en 3^+ : asymptotes $y = 2$ et $x = 3$.

2. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET PRIMITIVES

Une **équation différentielle** a pour inconnue une **fonction** y , liée à sa dérivée y' .

Primitive

F est une **primitive** de f sur I si $F' = f$: F est solution de $y' = f$.

- toutes les primitives : $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
- une seule vérifie une condition $F(x_0) = y_0$.

Exemple : $f(x) = 6x^2 - 4x + e^{2x}$, $F(0) = 3$:
 $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.

Primitives usuelles (à une constante près)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
k	kx	e^x	e^x
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$u' e^u$	e^u
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$

Réflexe : on vérifie toujours une primitive en la dérivant.

3. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$

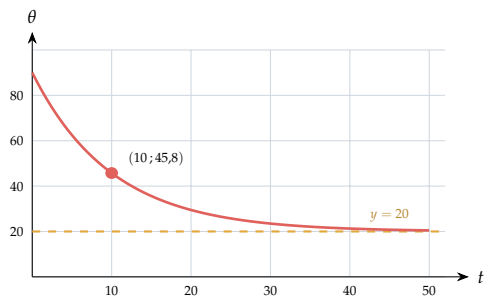
- $y' = ay$: solutions $x \mapsto C e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$;
- $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est la **solution constante** (équilibre) de $y' = ay + b$.

$$y' = ay + b \iff y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Refroidissement de Newton

$$\theta' = -0,1(\theta - 20) = -0,1\theta + 2, \quad \theta(0) = 90.$$

1. $a = -0,1$, $b = 2$: $-\frac{b}{a} = 20$;
2. $\theta(t) = C e^{-0,1t} + 20$;
3. $\theta(0) = C + 20 = 90$ donc $C = 70$: $\theta(t) = 70 e^{-0,1t} + 20$.



La température tend vers l'équilibre 20 °C.

Même structure que $u_{n+1} = au_n + b$: un **équilibre** plus un terme exponentiel qui s'amortit.

4. MÉTHODES TYPES

Limite d'un modèle

1. repérer le terme e^{-kt} ;
2. il tend vers 0, conclure ;
3. interpréter : valeur d'**équilibre**, asymptote horizontale.

Primitive avec condition

1. écrire $F(x) + C$;
2. remplacer x par x_0 ;
3. résoudre en C ;
4. vérifier en dérivant.

Résoudre $y' = ay + b$

1. mettre sous la forme $y' = ay + b$;
2. écrire $y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$;
3. trouver C avec la condition initiale ;
4. étudier la limite et interpréter.

À RETENIR

⊙ $e^{-kt} \rightarrow 0 \ (k > 0)$: le modèle se stabilise.

⊙ F primitive de $f \iff F' = f$; toutes : $F + C$.

⊙ $y' = ay : C e^{ax}$;
 $y' = ay + b :$
 $C e^{ax} - \frac{b}{a}$.

⊙ La condition initiale fixe la constante C .

☀ Développer avant de lire a et b ; attention au signe de $-\frac{b}{a}$.