

Évolution : modèles continus

Limite d'une fonction, primitives, équations différentielles

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Limite d'une fonction

Limites et asymptotes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ se rapproche autant qu'on veut de ℓ quand x devient grand. La droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$: la droite $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Limites de référence

$x^n \ (n \geq 1)$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	e^x	e^{-x}
$\lim_{+\infty} = +\infty$	$\lim_{\pm\infty} = 0$	$\lim_{+\infty} = +\infty$	$\lim_{+\infty} e^x = +\infty, \lim_{-\infty} e^x = 0$	$\lim_{+\infty} e^{-x} = 0$

Plus généralement, pour $k > 0$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{kt} = +\infty$.

Croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ (« l'exponentielle l'emporte »).

Méthode — limite en $+\infty$ d'un modèle

Exemple : $f(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$. Comme $-0,1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$. La droite $y = 20$ est asymptote horizontale.

Exemple : $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sur $]3; +\infty[$. En $+\infty$: $g(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \rightarrow 2$. En 3^+ : numérateur $\rightarrow 7$, dénominateur $\rightarrow 0^+$, donc $g(x) \rightarrow +\infty$: asymptote verticale $x = 3$.

2 Équation différentielle et primitives

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une *fonction* y , et qui relie y à sa dérivée y' . **Résoudre** sur I , c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur I qui la vérifient.

Exemple : $f(x) = e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$ car $f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$.

Primitive

Soit f définie sur I . Une fonction F dérivable sur I est une **primitive** de f sur I si $F' = f$. Autrement dit, F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Propriété

Si F est une primitive de f sur I , les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Il existe une **unique** primitive prenant une valeur donnée y_0 en un point x_0 (condition initiale).

Primitives usuelles (à une constante près)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
k	kx	e^x	e^x
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$e^{ax+b} \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$u' e^u$	e^u
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$

Méthode — primitive vérifiant une condition

Exemple : Trouver la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 4x + e^{2x}$ telle que $F(0) = 3$.
 $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + C$. $F(0) = \frac{1}{2} + C = 3 \iff C = \frac{5}{2}$.

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$$

Vérification : on dérive F et on retrouve f : c'est le réflexe à avoir.

3 L'équation différentielle $y' = ay + b$ **Solutions de $y' = ay$ puis de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)**

- Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.
- La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une **solution particulière** de $y' = ay + b$ (sa dérivée est nulle et $a \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$).
- Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

- Pour une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donnée, il existe une **unique** solution.

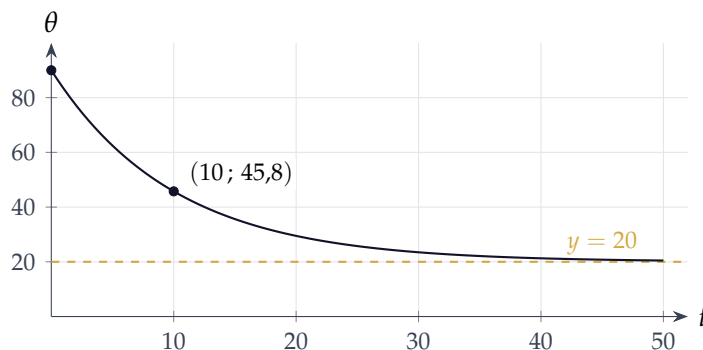
Méthode — loi de refroidissement de Newton

Exemple : Un café à 90°C est posé dans une pièce à 20°C . Sa température $\theta(t)$ (t en minutes) vérifie

$$\theta'(t) = -0,1(\theta(t) - 20) \quad \text{soit} \quad \theta' = -0,1\theta + 2, \quad \theta(0) = 90.$$

- On identifie $a = -0,1$ et $b = 2$; solution particulière : $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-0,1} = 20$.
- Solutions générales : $\theta(t) = C e^{-0,1t} + 20$.

3. Condition initiale : $\theta(0) = C + 20 = 90 \iff C = 70$, donc $\theta(t) = 70e^{-0,1t} + 20$.
4. Limite : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$, donc $\theta(t) \rightarrow 20$: le café atteint la température de la pièce.
5. Valeur : $\theta(10) = 70e^{-1} + 20 \approx 45,8$ °C au bout de 10 minutes.



La température décroît vers l'asymptote $y = 20$: elle baisse vite au début, puis de plus en plus lentement.

Lien avec les modèles discrets

Le modèle discret $u_{n+1} = au_n + b$ (chapitre 2) et le modèle continu $y' = ay + b$ ont la même structure : une solution « d'équilibre » constante ($\ell = \frac{b}{1-a}$ ou $-\frac{b}{a}$) plus un terme exponentiel (a^n ou e^{ax}) qui s'amortit ou explose.

À retenir

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$ pour $k > 0$: c'est lui qui fait converger les modèles.
- F primitive de $f \iff F' = f$; toutes les primitives : $F + C$.
- $y' = ay : y = Ce^{ax}$. $y' = ay + b : y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
- La constante C se détermine avec la **condition initiale**.
- **Piège** : réécrire d'abord l'équation sous la forme $y' = ay + b$ (développer $-0,1(\theta - 20)$) avant de lire a et b , et ne pas oublier le signe dans $-\frac{b}{a}$.