

Fonctions (I) — Limites

TERMINALE

1 Limites des fonctions de référence

Propriété — Fonction inverse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Propriété — Fonction puissance

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

En $-\infty$, le comportement dépend de la parité de n :

$$\text{si } n \text{ est pair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \text{si } n \text{ est impair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

Propriété — Fonctions exponentielle et racine carrée

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} &= 0 \end{aligned}$$

2 Opérations sur les limites

Propriété — Limite d'une somme

On note ℓ et ℓ' des réels. La limite de $f + g$ se lit dans le tableau (F.I. : forme indéterminée) :

$\lim f$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	F.I. $\ll \infty - \infty \gg$	$-\infty$	$-\infty$

Propriété — Limite d'un produit

La limite de $f \times g$ se lit dans le tableau. Lorsque le résultat est infini, son signe est donné par la règle des signes :

$\lim f$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim(f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	F.I. $\ll 0 \times \infty \gg$

Propriété — Limite d'un quotient

La limite de $\frac{f}{g}$ se lit dans le tableau :

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ'	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ (r.d.s.)	$\pm\infty$ (r.d.s.)	F.I. $\ll \frac{0}{0} \gg$	F.I. $\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$

À retenir

Les quatre formes indéterminées — on ne peut pas conclure directement :

$$\ll +\infty - \infty \gg \quad \ll 0 \times \infty \gg \quad \ll \frac{0}{0} \gg \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg$$

3 Lever une forme indéterminée**Méthode**

Pour lever une forme indéterminée, on peut :

- **factoriser par le monôme de plus haut degré** (polynômes, fractions rationnelles) ;
- **multiplier par le conjugué** (expressions avec racines carrées) ;
- **utiliser le théorème d'encadrement ou de comparaison** ;
- **utiliser les croissances comparées**.

Méthode

Exemple : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 1)$.

Forme indéterminée $\ll +\infty - \infty \gg$; on factorise par x^2 :

$$3x^2 - 5x + 1 = x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 3$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 1) = +\infty$.

Remarque : on factorise **systématiquement** par le monôme de plus haut degré, puis on conclut par produit ou par quotient à l'aide des limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Méthode

Exemple : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Forme indéterminée $\ll +\infty - \infty \gg$; on multiplie par le conjugué :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

4 Asymptotes

Définition

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f .

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}$.

Méthode

Exemple : Pour $f(x) = \frac{1}{x-2}$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, donc la droite $x = 2$ est asymptote verticale. De plus $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, donc l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

À retenir

Fonctions de référence : connaître par cœur les limites de $\frac{1}{x}$, x^n , e^x et $\sqrt{x}$.

Opérations : lire les tableaux, repérer les quatre F.I.

Lever une F.I. : factoriser par le terme dominant, multiplier par le conjugué, encadrer ou comparer.

Asymptotes : limite finie $\Rightarrow$ horizontale ; limite infinie en $a \Rightarrow$ verticale.