

Raisonnement par récurrence

TERMINALE

1 Le principe

Méthode

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- **Étape ① — Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Étape ② — Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq n_0$. On suppose $P(n)$ vraie (*hypothèse de récurrence*) et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- **Étape ③ — Conclusion** : on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

À retenir

Une récurrence ne fonctionne que si les **deux** étapes sont validées : l'initialisation *et* l'hérédité. Oublier l'initialisation, c'est risquer de « démontrer » une propriété fausse.

2 Récurrence sur une égalité

Méthode

Exemple : Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation ($n = 1$) : à gauche 1, à droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. On ajoute $(n+1)$:

$$1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3 Récurrence sur une inégalité

Méthode

Dans l'hérédité d'une inégalité, on part de l'hypothèse $P(n)$ et on **ajoute** ou on **major**e pour faire apparaître $P(n+1)$.

Exemple : Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $2^n \geq n+1$.

Initialisation ($n = 0$) : $2^0 = 1$ et $0+1 = 1$, donc $2^0 \geq 0+1$: vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose $2^n \geq n+1$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2 = (n+1)+1.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$.

4 Récurrence et divisibilité

Méthode

Pour une divisibilité, on écrit $P(n + 1)$ en fonction de $P(n)$ et on **factorise** pour faire apparaître le diviseur.

Exemple : Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Initialisation ($n = 0$) : $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, divisible par 3 : vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier m tel que $4^n - 1 = 3m$. Alors

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1).$$

Donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

À retenir

Égalité : on ajoute le terme de rang $n + 1$ à l'hypothèse.

Inégalité : on part de l'hypothèse puis on majore ou minore.

Divisibilité : on factorise $P(n + 1)$ pour faire apparaître le diviseur.