

# ÉVOLUTION : MODÈLES DISCRETS

## — TERMINALE – MATHS COMPLÉMENTAIRES —

### 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Une suite se définit :

- de façon **explicite** :  $u_n = f(n)$  ;
- par récurrence** :  $u_0$  donné et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

#### Sens de variation

$(u_n)$  **croissante** si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$ . On étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , ou on compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 si  $u_n > 0$ .

#### Suites de référence

|            | arithmétique (raison $r$ ) | géométrique (raison $q$ )      |
|------------|----------------------------|--------------------------------|
| récurrence | $u_{n+1} = u_n + r$        | $u_{n+1} = q u_n$              |
| explicite  | $u_n = u_0 + nr$           | $u_n = u_0 q^n$                |
| évolution  | ajout constant             | taux $t$ constant, $q = 1 + t$ |

$$\text{Somme : } 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

### 2. LIMITE D'UNE SUITE

- $(u_n)$  **converge** vers  $\ell$  : à partir d'un certain rang, tous les termes sont aussi proches de  $\ell$  qu'on veut ;
- $(u_n)$  **tend vers**  $+\infty$  : elle dépasse tout réel  $A$  à partir d'un certain rang ;
- sinon (ex.  $(-1)^n$ ) : pas de limite. Non convergente = **divergente**.

Références :  $n, n^2, \sqrt{n} \rightarrow +\infty$  ;  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} -1 < q < 1 &\Rightarrow \lim q^n = 0 \\ q > 1 &\Rightarrow \lim q^n = +\infty \end{aligned}$$

#### Formes indéterminées

$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$  : on **factorise par le terme dominant**.

#### Exemple

$$u_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 5n} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n}} \rightarrow 3$$

$$v_n = 5 - 2 \times 0,9^n \rightarrow 5 \text{ car } \lim 0,9^n = 0.$$

### 3. LIMITES ET INÉGALITÉS

#### Théorèmes de comparaison

- $u_n \geq v_n$  et  $\lim v_n = +\infty \Rightarrow \lim u_n = +\infty$  ;
- $u_n \leq v_n$  et  $\lim v_n = -\infty \Rightarrow \lim u_n = -\infty$ .

#### Théorème des gendarmes

Si  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et si  $(v_n), (w_n)$  convergent vers la **même** limite  $\ell$ , alors  $\lim u_n = \ell$ .

**Exemple** :  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ , les deux bornes tendent vers 0, donc  $\lim \frac{\cos n}{n} = 0$ .

#### Convergence monotone (admis)

- croissante et **majorée**  $\Rightarrow$  converge ;
- décroissante et **minorée**  $\Rightarrow$  converge ;
- croissante **non majorée**  $\Rightarrow$  tend vers  $+\infty$ .

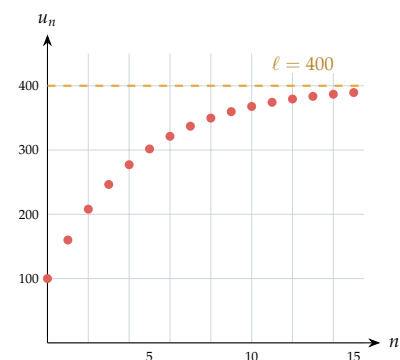
### 4. SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

$u_{n+1} = a u_n + b$  ( $a \neq 1, b \neq 0$ ) : une quantité varie d'un **pourcentage fixe** et reçoit un **apport fixe** (population, capital, médicament...).

- Point fixe** :  $\ell = a\ell + b \iff \ell = \frac{b}{1-a}$ .
- Suite auxiliaire** :  $v_n = u_n - \ell$  vérifie  $v_{n+1} = a v_n$ , elle est géométrique de raison  $a$ .
- Forme explicite** :

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n$$

Si  $-1 < a < 1$  :  $\lim u_n = \ell$  (état d'équilibre).



$$u_0 = 100, u_{n+1} = 0,8u_n + 80 : u_n = 400 - 300 \times 0,8^n \rightarrow 400.$$

**Seuil** : plus petit  $n$  tel que  $u_n > 390$  : tableau de valeurs ou boucle `while` :  $n = 16$ .

#### À RETENIR

🕒  $\lim q^n = 0$  si  $-1 < q < 1$  ;  $+\infty$  si  $q > 1$ .

🔍 Forme indéterminée : factoriser par le terme dominant.

✅ Gendarmes : encadrer par deux suites de même limite.

📐  $u_{n+1} = a u_n + b$  : point fixe  $\ell = \frac{b}{1-a}$ , puis  $v_n = u_n - \ell$ .

💡 Baisse de 20 % : on multiplie par 0,8.