

Évolution : modèles discrets

Suites, limites, suites arithmético-géométriques

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Généralités sur les suites

Deux façons de définir une suite

- **Forme explicite** : $u_n = f(n)$, on calcule directement n'importe quel terme. Ex. : $u_n = 3 \times 2^n$.
- **Par récurrence** : on donne le premier terme et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Ex. : $u_0 = 5$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 80$.

Rappels de Première — suites de référence

	arithmétique de raison r	géométrique de raison q
récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
explicite	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
évolution	variation absolue constante	taux d'évolution constant t , $q = 1 + t$
somme	$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$

Sens de variation

(u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou, si tous les termes sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Méthode

Exemple : $u_n = n^2 - 4n$. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - n^2 + 4n = 2n - 3$.

$2n - 3 \geq 0 \iff n \geq 2$: la suite est croissante à partir du rang 2.

2 Limite d'une suite

Suite convergente, suite divergente

- (u_n) **converge** vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.
- Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (elle tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite, comme $(-1)^n$).

Limites de référence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Suite géométrique (q^n) :

$$-1 < q < 1 : \lim q^n = 0 \qquad q > 1 : \lim q^n = +\infty$$

($q = 1$: suite constante égale à 1 ; $q \leq -1$: pas de limite)

Opérations sur les limites

Somme, produit et quotient de limites finies se calculent « naturellement ». Avec l'infini : $+\infty + \ell = +\infty$, $\ell \times (+\infty) = \pm\infty$ selon le signe de $\ell \neq 0$, $\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$.

Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$: il faut transformer l'écriture (factoriser par le terme dominant).

Méthode — lever une indétermination

Exemple : $u_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 5n}$. On factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2 (3 + \frac{1}{n^2})}{n^2 (1 + \frac{5}{n})} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

Exemple : $v_n = 5 - 2 \times 0,9^n$. Comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim 0,9^n = 0$ donc $\lim v_n = 5$.

3 Limites et inégalités**Théorèmes de comparaison**

- **Minoration** : si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- **Majoration** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.
- **Théorème des gendarmes** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors $\lim u_n = \ell$.

Méthode

Exemple : $u_n = \frac{\cos n}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme $-1 \leq \cos n \leq 1$:

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim -\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0 \quad \implies \quad \lim u_n = 0$$

Convergence monotone (admis)

Une suite **croissante et majorée** converge ; une suite **décroissante et minorée** converge.
Une suite croissante **non majorée** tend vers $+\infty$.

4 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite est **arithmético-géométrique** si elle vérifie, pour tout n , $u_{n+1} = a u_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Modèle typique : une quantité perd (ou gagne) un pourcentage fixe *et* reçoit un apport fixe à chaque étape (population avec prélèvement, capital avec versements, médicament à doses répétées...).

Méthode de la suite auxiliaire

On note ℓ la solution de $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$ (**point fixe**). La suite $v_n = u_n - \ell$ est **géométrique de raison a** , d'où

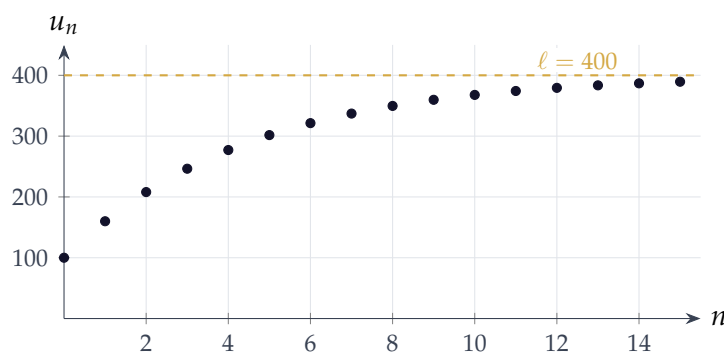
$$u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n$$

Si $-1 < a < 1$, alors $\lim a^n = 0$ et $\lim u_n = \ell$.

Méthode — modéliser et étudier une suite arithmético-géométrique

Exemple : Un lac contient 100 kg de poissons. Chaque année, 20 % du stock disparaît (pêche, prédation) et l'on réintroduit 80 kg. On note u_n le stock l'année n .

- Modèle :** retirer 20 %, c'est multiplier par 0,8 : $u_{n+1} = 0,8 u_n + 80$, $u_0 = 100$.
- Point fixe :** $\ell = 0,8\ell + 80 \iff 0,2\ell = 80 \iff \ell = 400$.
- Suite auxiliaire :** $v_n = u_n - 400$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 400 = 0,8u_n + 80 - 400 = 0,8(u_n - 400) = 0,8v_n$.
(v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 100 - 400 = -300$.
- Forme explicite :** $v_n = -300 \times 0,8^n$, donc $u_n = 400 - 300 \times 0,8^n$.
- Limite :** $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim 0,8^n = 0$ et $\lim u_n = 400$: le stock se stabilise vers 400 kg.



Les termes $u_n = 400 - 300 \times 0,8^n$ croissent et s'approchent de 400 sans jamais l'atteindre.

Méthode — déterminer un seuil

Exemple : À partir de quelle année le stock dépasse-t-il 390 kg ?

On cherche le plus petit n tel que $400 - 300 \times 0,8^n > 390$, soit $0,8^n < \frac{1}{30}$. À la calculatrice (tableau de valeurs ou algorithme de seuil) : $0,8^{15} \approx 0,035$ et $0,8^{16} \approx 0,028 < \frac{1}{30} \approx 0,033$. Réponse : $n = 16$.

```
def seuil():  
    n, u = 0, 100  
    while u <= 390:  
        n, u = n + 1, 0.8*u + 80  
    return n
```

À retenir

- $\lim q^n = 0$ si $-1 < q < 1$; $\lim q^n = +\infty$ si $q > 1$.
- Forme indéterminée ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$...) : **factoriser par le terme dominant**.
- Gendarmes : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell \Rightarrow \lim u_n = \ell$.
- $u_{n+1} = au_n + b$: point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$, puis $v_n = u_n - \ell$ géométrique de raison a , et $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.
- **Piège** : la suite auxiliaire n'est *pas* au hasard : c'est $u_n - \ell$ avec le point fixe. Toujours vérifier $v_{n+1} = a v_n$ par le calcul.