

Suites (I) — Limites

TERMINALE

1 Limite d'une suite

Définition

Soit (u_n) une suite.

- (u_n) a pour limite $+\infty$ si, pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- (u_n) a pour limite $-\infty$ si, pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $] -\infty; -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- (u_n) a pour limite un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite **converge** vers ℓ .

Une suite qui n'a pas de limite finie est dite **divergente**.

Propriété — Suites de référence

- Les suites (n) , $(\sqrt{n})$ et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0.

2 Opérations sur les limites

Propriété

On calcule la limite d'une **somme**, d'un **produit** ou d'un **quotient** terme à terme, tant que l'on ne rencontre pas une *forme indéterminée*. Par exemple :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

À retenir

Les quatre formes indéterminées — on ne peut pas conclure directement :

$$\ll +\infty - \infty \gg \quad \ll 0 \times \infty \gg \quad \ll \frac{0}{0} \gg \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg$$

On lève l'indétermination en **factorisant par le terme dominant**.

Méthode

Exemple : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée $\ll +\infty - \infty \gg$. On factorise par n^2 :

$$n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = +\infty$.

3 Comparaison et encadrement

Propriété — Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété — Théorème des gendarmes

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ avec ℓ un réel, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Propriété — Inégalités et limites

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si (u_n) et (v_n) convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Méthode

Exemple : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (pour $n \geq 1$).

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

À retenir

Formes indéterminées : on factorise par le terme dominant.

Comparaison : une minoration par une suite de limite $+\infty$ (ou une majoration par une suite de limite $-\infty$) impose la limite.

Gendarmes : un encadrement par deux suites de même limite finie ℓ donne la limite ℓ .