

MODÈLES DÉFINIS PAR UNE FONCTION

— TERMINALE – MATHS COMPLÉMENTAIRES —

1. DÉRIVATION : LES OUTILS DE CALCUL

Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$f(x)$	$f'(x)$	opération	dérivée
x^n	nx^{n-1}	uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	ku	ku'
e^x	e^x	$u + v$	$u' + v'$

Dérivée d'une fonction composée

Si u est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$:

$$(g \circ u)' = u' \times g'(u)$$

- $(e^u)' = u' e^u$ $(u^n)' = n u' u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$

Exemple : $h(x) = e^{-0,5x+1}$: $u = -0,5x + 1$, $u' = -0,5$, donc $h'(x) = -0,5 e^{-0,5x+1}$.

2. APPLICATIONS : VARIATIONS ET OPTIMISATION

Signe de la dérivée

- $f' > 0$ sur I : f **strictement croissante** sur I ;
- $f' < 0$ sur I : f **strictement décroissante** sur I ;
- f' s'annule **en changeant de signe** en a : $f(a)$ est un **extremum local**.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2; 2]$

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$: f croît sur $[-2; -1]$, décroît sur $[-1; 1]$, croît sur $[1; 2]$. Maximum local $f(-1) = 3$, minimum local $f(1) = -1$.

Vocabulaire économique

Pour une production q de coût total $C(q)$:

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} \quad C_m(q) = C'(q) \approx C(q+1) - C(q)$$

C_M : **coût moyen** (par unité) ; C_m : **coût marginal** (coût d'une unité de plus). Bénéfice : $B(q) = R(q) - C(q)$, optimisé par l'étude du signe de B' .

Au **minimum du coût moyen**, coût moyen et coût marginal sont égaux.

3. FONCTIONS CONTINUES ET THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

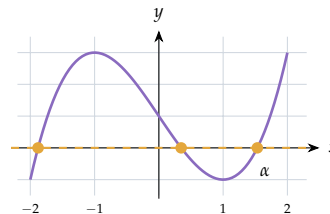
f est **continue** sur I si sa courbe se trace sans lever le crayon. Polynômes, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, e^x et leurs combinaisons sont continues ; **dérivable** $\Rightarrow$ **continue**.

Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire

Si f est **continue** sur $[a; b]$, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.

Si de plus f est **strictement monotone**, cette solution est **unique**.

Dichotomie : on coupe l'intervalle en deux et on garde la moitié où f change de signe. Pour $x^3 - 3x + 1 = 0$ sur $[1; 2]$: $\alpha \approx 1,53$.



3 solutions sur $[-2; 2]$, une seule sur $[1; 2]$ où f est strictement croissante.

4. CONVEXITÉ

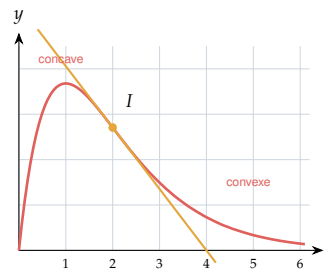
- f **convexe** : courbe **au-dessus** de ses tangentes (forme U) ;
- f **concave** : courbe **en dessous** de ses tangentes (forme ∩) ;
- point d'inflexion** : la courbe **traverse** sa tangente, la convexité change.

$$f'' \geq 0 \text{ sur } I \iff f' \text{ croissante} \iff f \text{ convexe}$$

$f'' \leq 0 \iff f$ concave. Si f'' s'annule **en changeant de signe** en a : point d'inflexion d'abscisse a .

Exemple : $f(x) = x e^{-x}$

$f''(x) = (x-2)e^{-x}$: concave sur $[0; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$, inflexion en $I(2; 2e^{-2})$.



En I , la courbe traverse sa tangente (en orange).

À RETENIR

Composée : $(g \circ u)' = u' \times g'(u)$, ne pas oublier u' .

Signe de $f' \Rightarrow$ variations et extrema.

Coût marginal $C_m = C'$; coût moyen $\frac{C(q)}{q}$.

TVI : continue + strictement monotone $\Rightarrow$ solution unique.

f'' change de signe $\Rightarrow$ inflexion ($f''(a) = 0$ ne suffit pas).