

Modèles définis par une fonction

Dérivation et applications, continuité, convexité

TERMINALE · MATHS COMPLÉMENTAIRES

1 Dérivation : les outils de calcul

Rappel de Première

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a . Cette tangente a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Dérivées usuelles et opérations

$f(x)$	$f'(x)$	sur	opération	dérivée
k	0	$\mathbb{R}$	$u + v$	$u' + v'$
$x^n \ (n \geq 1)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	ku	ku'
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[$	uv	$u'v + uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$		

Dérivée d'une fonction composée

Si u est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$, alors $g \circ u : x \mapsto g(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

Cas particuliers à connaître :

$$(f(ax + b))' = a f'(ax + b) \quad (u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (e^u)' = u' e^u$$

Méthode — repérer la fonction « intérieure »

On identifie u (ce qu'il y a « dedans »), on calcule u' , puis on applique la formule.

- $f(x) = (2x + 1)^3 : u = 2x + 1, u' = 2$, donc $f'(x) = 3 \times 2 \times (2x + 1)^2 = 6(2x + 1)^2$.
- $g(x) = \sqrt{3x + 1}$ sur $] -\frac{1}{3}; +\infty[: u = 3x + 1, u' = 3$, donc $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$.
- $h(x) = e^{-0,5x+1} : u = -0,5x + 1, u' = -0,5$, donc $h'(x) = -0,5 e^{-0,5x+1}$.

2 Applications : variations et optimisation

Signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ sur I (sauf en des points isolés), f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I (sauf en des points isolés), f est strictement décroissante sur I .
- Si f' s'annule **en changeant de signe** en a , alors $f(a)$ est un **extremum local**.

Méthode — étudier les variations

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-2; 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et 1 , positive à l'extérieur des racines.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-1	3	-1	3	

Maximum local $f(-1) = 3$, minimum local $f(1) = -1$.

Vocabulaire économique

Pour une production de q unités, on note $C(q)$ le **coût total**.

- **Coût moyen** : $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$, coût par unité produite.
- **Coût marginal** : $C_m(q) = C'(q)$, qui approxime le coût de production d'une unité supplémentaire : $C(q+1) - C(q) \approx C'(q)$.

Avec une recette $R(q)$, le **bénéfice** est $B(q) = R(q) - C(q)$.

Méthode — optimiser un coût

Exemple : $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 50$ (en centaines d'euros) pour $q \in [0; 10]$ (en tonnes).

Coût marginal : $C_m(q) = C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$. C'est un trinôme de dérivée $6q - 24$, nulle en $q = 4$:

$$C_m(4) = 3 \times 16 - 96 + 60 = 12$$

Le coût marginal est minimal pour **4 tonnes** : produire la 5^e tonne coûte environ 1200 €.

3 Fonctions continues et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité

Une fonction f est **continue** sur un intervalle I si sa courbe se trace « sans lever le crayon » sur I .
Formellement : pour tout $a \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

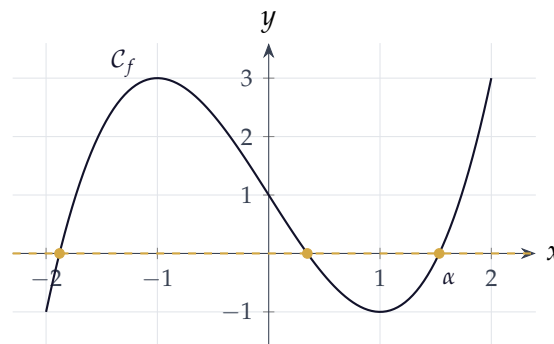
Propriété

- Les fonctions polynômes, inverse, racine carrée, exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition ; sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.
- **Toute fonction dérivable sur I est continue sur I** (la réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ est continue mais non dérivable en 0).

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et corollaire

Si f est **continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.

Corollaire. Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a; b]$, cette solution est **unique**.



La droite $y = 0$ coupe C_f trois fois sur $[-2; 2]$, mais une seule fois sur $[1; 2]$ où f est strictement croissante.

Méthode — justifier l'existence et l'unicité d'une solution

Exemple : Montrer que $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.

1. f est un polynôme, donc **continue** sur $[1; 2]$.
2. f est **strictement croissante** sur $[1; 2]$ (tableau du §2).
3. $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$: 0 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$.

D'après le corollaire du TVI, l'équation admet une **unique solution** $\alpha \in [1; 2]$.

Encadrement par dichotomie : on coupe l'intervalle en deux et on garde la moitié où f change de signe.

a	b	$m = \frac{a+b}{2}$	signe de $f(m)$	nouvel intervalle
1	2	1,5	$f(1,5) = -0,125 < 0$	$[1,5; 2]$
1,5	2	1,75	$f(1,75) \approx 1,11 > 0$	$[1,5; 1,75]$
1,5	1,75	1,625	$f(1,625) \approx 0,42 > 0$	$[1,5; 1,625]$

On poursuit jusqu'à la précision voulue : $\alpha \approx 1,53$.

4 Convexité

Fonction convexe, fonction concave

Soit f dérivable sur I .

- f est **convexe** sur I si sa courbe est située **au-dessus de toutes ses tangentes** (elle « sourit » : forme $\cup$).
- f est **concave** sur I si sa courbe est située **en dessous de toutes ses tangentes** (forme $\cap$).

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe **traverse sa tangente** : la convexité y change.

Caractérisation par la dérivée seconde

On note f'' la dérivée de f' (dérivée seconde).

$$f'' \geq 0 \text{ sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I \iff f \text{ convexe sur } I$$

De même, $f'' \leq 0 \iff f$ concave. Si f'' s'annule **en changeant de signe** en a , le point d'abscisse a est un point d'inflexion.

Méthode — étudier la convexité

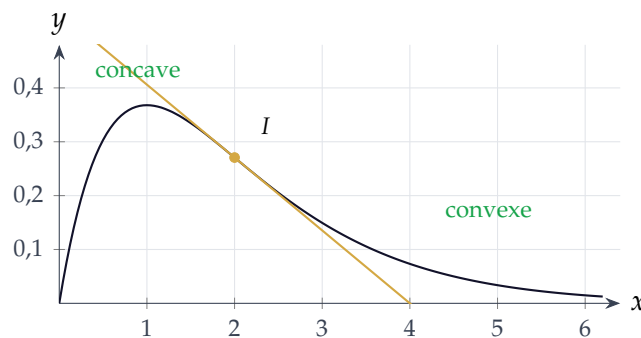
Exemple : $f(x) = x e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$ (modèle de concentration d'un médicament dans le sang).

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x} \quad \text{puis} \quad f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x - 2$:

- f est **concave** sur $[0; 2]$ et **convexe** sur $[2; +\infty[$;
- le point $I(2; 2e^{-2}) \approx (2; 0,27)$ est un **point d'inflexion**.

Interprétation : après $t = 2$ h, la concentration diminue de moins en moins vite.



En I , la courbe traverse sa tangente (en or) : c'est le point d'inflexion.

À retenir

- Dérivée composée : $(g \circ u)' = u' \times g'(u)$; en particulier $(e^u)' = u'e^u$ et $(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$.
- Signe de $f' \Rightarrow$ variations ; f' s'annule en changeant de signe $\Rightarrow$ extremum.
- Coût marginal $C_m = C'$; coût moyen $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.
- TVI : **continue + strictement monotone** + k entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow$ **une unique** solution.
- $f'' \geq 0 \iff$ convexe ; f'' s'annule **en changeant de signe** $\Rightarrow$ point d'inflexion.
- **Piège** : $f''(a) = 0$ ne suffit pas ! Pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f'' \geq 0$ partout : aucun point d'inflexion.