

Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Physique-Chimie

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 1 — Sujet 26-PYCJ1PO1

Polynésie

Exercice 1 — Synthèse d'une coumarine

(9 pts)

RAPPEL DE COURS

Données utiles : concentration standard $c^o = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; solution mère $C = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, solution fille $V_1 = 100,0 \text{ mL}$ et $C_1 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Masses molaires : résorcinol $M_r = 110 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, acétoacétate d'éthyle $M_{AE} = 130 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, composé A $M_A = 176 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Densité du résorcinol $d = 1,08$.

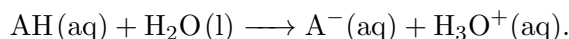
Partie 1 — Étude de l'acide sulfamique par pH-métrie

Q.1. Expression du pH d'une solution d'acide fort

RAPPEL DE COURS

Un **acide fort** est un acide dont la réaction avec l'eau est **totale** : il est intégralement dissocié en solution aqueuse. Le pH d'une solution aqueuse est défini par $\text{pH} = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}}}{c^o}\right)$, avec $c^o = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Soit un acide fort AH du couple AH/A⁻, apporté à la concentration en quantité de matière C . Sa réaction avec l'eau est totale :



Bilan de matière en concentration (le volume de la solution est constant) :

État du système	[AH]	[A ⁻]	[H ₃ O ⁺]
Initial	C	0	≈ 0
Final (transformation totale)	0	C	C

La transformation étant totale, AH est entièrement consommé et chaque molécule d'acide libère un ion oxonium : $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{éq}} = C$ (on néglige les ions oxonium issus de l'autoprotolyse de l'eau, ce qui est légitime tant que $C \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$). En reportant dans la définition du pH :

RÉPONSE

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{C}{c^o}\right).$$

Q.2. Volume V' à prélever et protocole de dilution

MÉTHODE

Lors d'une dilution, on ajoute du solvant : la **quantité de matière de soluté est conservée**, donc $C \times V' = C_1 \times V_1$.

$$V' = \frac{C_1 V_1}{C} = \frac{1,0 \times 10^{-2} \times 100,0 \times 10^{-3}}{1,0 \times 10^{-1}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ L} = 10,0 \text{ mL}.$$

Contrôle : le facteur de dilution vaut $\frac{C}{C_1} = 10$, et l'on retrouve bien $\frac{V_1}{V'} = \frac{100,0}{10,0} = 10$.

Protocole détaillé :

- prélever $V' = 10,0 \text{ mL}$ de solution S à l'aide d'une **pipette jaugée de** $10,0 \text{ mL}$ munie d'une propipette ;
- introduire ce prélèvement dans une **fiolle jaugée de** $100,0 \text{ mL}$ contenant déjà un peu d'eau distillée ;
- compléter avec de l'eau distillée jusqu'au **trait de jauge**, le bas du ménisque étant tangent au trait ;
- boucher la fiolle et **homogénéiser** par retournements successifs.

RÉPONSE

$V' = 10,0 \text{ mL}$: on prélève ce volume à la pipette jaugée de $10,0 \text{ mL}$ et on complète à $100,0 \text{ mL}$ en fiolle jaugée (dilution d'un facteur 10).

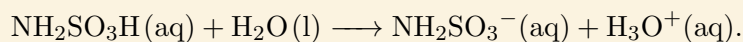
ATTENTION

On utilise une pipette jaugée et une fiolle jaugée, et non une éprouvette graduée ou un bécher : seules les verreries **jaugées** garantissent une incertitude suffisamment faible sur le volume, donc sur la concentration de la solution fille.

Q.3. Équation de la réaction entre l'acide sulfamique et l'eau

L'acide sulfamique $\text{NH}_2\text{SO}_3\text{H}$ appartient au couple $\text{NH}_2\text{SO}_3\text{H}(\text{aq})/\text{NH}_2\text{SO}_3^-(\text{aq})$: il cède un proton H^+ à l'eau, qui appartient au couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$ et joue ici le rôle de **base**.

RÉPONSE



ATTENTION

L'acide sulfamique étant un **acide fort**, on écrit une **flèche simple** ($\rightarrow$), qui traduit une transformation **totale**. Une double flèche ($\rightleftharpoons$) serait réservée à un acide faible, dont la réaction avec l'eau est limitée et conduit à un état d'équilibre.

Q.4. Vérification du caractère fort de l'acide sulfamique

MÉTHODE

Il faut **confronter le modèle à l'expérience**. Le modèle de l'acide fort établi en Q.1 prévoit $\text{pH} = -\log\left(\frac{C_n}{c^o}\right)$, c'est-à-dire une relation **affine de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine nulle**. Il suffit donc de tester si les points de la **Figure 2** sont alignés sur la droite d'équation $y = x$.

Lecture graphique des quatre points :

Solution	$-\log\left(\frac{C_n}{c^o}\right)$	pH mesuré	Écart
S_1	2,0	$\approx 2,2$	+0,2
S_2	3,0	$\approx 3,1$	+0,1
S_3	4,0	$\approx 4,1$	+0,1
S_4	5,0	$\approx 5,3$	+0,3

Les quatre points sont sensiblement alignés. Le coefficient directeur de la droite passant au plus près de ces points, calculé à partir des points extrêmes, vaut :

$$a = \frac{\Delta(\text{pH})}{\Delta(-\log \frac{C_n}{C_o})} = \frac{5,3 - 2,2}{5,0 - 2,0} = \frac{3,1}{3,0} \approx 1,0,$$

et son ordonnée à l'origine $b = 2,2 - 1,0 \times 2,0 \approx 0,2$, très proche de 0. Les écarts observés (au plus 0,3 unité de pH) restent de l'ordre de l'incertitude d'une mesure pH-métrique courante (étalonnage du pH-mètre, lecture graphique).

RÉPONSE

On retrouve expérimentalement $\text{pH} \approx -\log(\frac{C_n}{C_o})$: la loi expérimentale coïncide, aux incertitudes près, avec le modèle de la question Q.1. L'acide sulfamique peut donc bien être considéré comme un **acide fort**.

Partie 2 — Synthèse d'une coumarine en présence d'acide sulfamique

Q.5. Compatibilité du spectre infrarouge avec la structure du composé A

MÉTHODE

On procède en deux temps : **(1)** recenser les liaisons présentes dans la molécule à identifier à partir de sa formule topologique ; **(2)** confronter cette liste aux bandes d'absorption effectivement observées, en s'appuyant sur la table de données fournie.

Étape 1 — liaisons présentes dans la 7-hydroxy-4-méthylcoumarine ($C_{10}H_8O_3$) :

- une liaison O–H appartenant à un groupe **hydroxyle phénolique** (position 7) ;
- une liaison C=O appartenant au groupe **ester cyclique (lactone)** du cycle coumarine ;
- des liaisons C–O (celle de la lactone et celle du phénol) ;
- **aucune** liaison N–H ni **aucun** groupe acide carboxylique –COOH.

Étape 2 — attribution des bandes observées sur la Figure 3 :

Bande observée	Allure	Attribution
$\approx 3200 - 3400 \text{ cm}^{-1}$	forte, large	liaison O–H du groupe hydroxyle
$\approx 1700 \text{ cm}^{-1}$	très forte, fine	liaison C=O ($1650 - 1740 \text{ cm}^{-1}$)
$1040 - 1300 \text{ cm}^{-1}$	fortes à moyennes	liaisons C–O

La bande très intense vers 1700 cm^{-1} tombe dans l'intervalle $1650 - 1740 \text{ cm}^{-1}$ de la table : elle signe sans ambiguïté une liaison C=O, cohérente avec la fonction ester du cycle lactonique. Les bandes situées entre 1040 et 1300 cm^{-1} correspondent aux liaisons C–O. Enfin, la bande large vers $3200 - 3400 \text{ cm}^{-1}$ traduit la liaison O–H : son caractère *large* et son décalage vers les faibles nombres d'onde par rapport au domaine $3500 - 3700 \text{ cm}^{-1}$ d'une liaison O–H *libre* s'expliquent par l'existence de **liaisons hydrogène** à l'état solide. Cette bande ne s'étend pas jusqu'à 2500 cm^{-1} : on écarte donc la présence d'un groupe acide carboxylique, ce qui est cohérent puisque le composé A n'en possède pas.

RÉPONSE

Toutes les liaisons attendues dans la 7-hydroxy-4-méthylcoumarine (O–H, C=O, C–O) sont retrouvées sur le spectre, et aucune bande n'y est incompatible avec cette structure : le spectre infrarouge du produit obtenu est bien **compatible** avec la structure du composé A.

ATTENTION — NUANCE À CONNAÎTRE

Le spectre présente des bandes dans l'intervalle $1560 - 1640 \text{ cm}^{-1}$, que la table associe à une liaison N–H. Il ne faut **pas** en conclure à la présence d'azote : dans cette zone absorbent également les liaisons C=C des **cycles aromatiques**, nombreuses dans le composé A. La spectroscopie infrarouge permet d'*identifier des liaisons* ; elle ne permet jamais à elle seule de *prouver* une structure complète — d'où la formulation prudente de l'énoncé (« montrer que le spectre est *compatible avec* »).

Q.6. Rendement η_1 de cette synthèse**RAPPEL DE COURS**

Le rendement d'une synthèse est $\eta = \frac{n_{\text{produit obtenu}}}{n_{\text{produit maximal}}}$; c'est un nombre **sans unité** compris entre 0 et 1.

1. La quantité n_{max} est celle qui serait obtenue si la transformation était **totale**, c'est-à-dire si le **réactif limitant** était intégralement consommé.

Quantité de résorcinol introduite. Sa densité $d = 1,08$ donne la masse volumique $\rho_R = d \times \rho_{\text{eau}} = 1,08 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$, d'où :

$$m_R = \rho_R V_R = 1,08 \times 11,1 = 12,0 \text{ g}, \quad n_R = \frac{m_R}{M_r} = \frac{12,0}{110} = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}.$$

Quantité d'acétylacétate d'éthyle introduite :

$$n_{AE} = \frac{m_{AE}}{M_{AE}} = \frac{14,2}{130} = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}.$$

Réactif limitant. Les nombres stœchiométriques valent tous deux 1 ; on compare donc directement $\frac{n_R}{1} = 1,090 \times 10^{-1} \text{ mol}$ et $\frac{n_{AE}}{1} = 1,092 \times 10^{-1} \text{ mol}$. Les réactifs sont introduits en proportions quasi stœchiométriques, le résorcinol étant très légèrement limitant : $n_{\text{max}} = n_R = 1,09 \times 10^{-1} \text{ mol}$.

Quantité de composé A réellement obtenue, puis rendement :

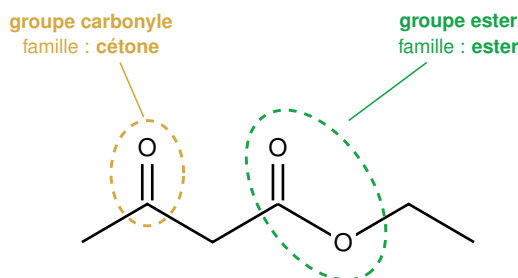
$$n_A = \frac{m}{M_A} = \frac{12,4}{176} = 7,05 \times 10^{-2} \text{ mol}, \quad \eta_1 = \frac{n_A}{n_{\text{max}}} = \frac{7,05 \times 10^{-2}}{1,09 \times 10^{-1}} = 0,646.$$

RÉPONSE

$\eta_1 = 0,65$ soit environ 65 % : environ 65 % de la quantité de composé A théoriquement accessible a effectivement été récupérée.

Partie 3 — Synthèse en présence d'acide paratoluènesulfonique**Q.7. Formule topologique de l'acétoacétate d'éthyle et groupes caractéristiques**

L'acétoacétate d'éthyle a pour formule semi-développée $\text{CH}_3\text{--CO--CH}_2\text{--CO--O--CH}_2\text{--CH}_3$ (formule brute $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_3$). On recopie sa formule topologique et on entoure les deux groupes caractéristiques, **en incluant à chaque fois l'atome d'oxygène du groupe carbonyle** :



Le groupe C=O porté par un atome de carbone lui-même lié à **deux atomes de carbone** est un groupe **carbonyle** ; le groupe --CO--O--C , dans lequel le carbone du C=O est lié à un atome d'oxygène lui-même lié à un carbone, est un groupe **ester**.

RÉPONSE

Les deux groupes caractéristiques entourés ci-dessus correspondent aux familles fonctionnelles **cétone** (groupe carbonyle, à gauche) et **ester** (à droite).

ATTENTION

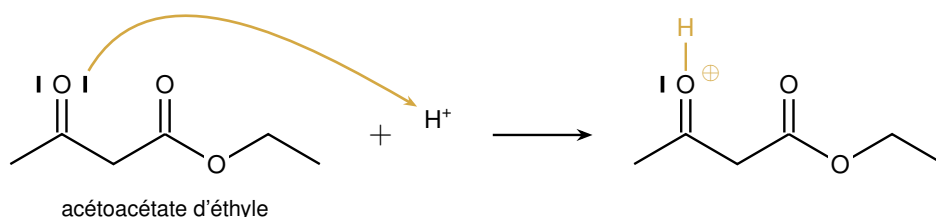
Ne pas confondre **cétone** et **aldéhyde** : dans un aldéhyde, le carbone du groupe C=O porte au moins un atome d'**hydrogène** et se trouve donc en bout de chaîne. Ici, le carbone du groupe carbonyle est encadré par deux carbones : il s'agit bien d'une cétone.

Q.8. Étape 1 du mécanisme et flèche courbe**RAPPEL DE COURS**

Une flèche courbe représente le **mouvement d'un doublet d'électrons**. Elle part **toujours** d'un doublet non liant ou d'un doublet liant (site **donneur**, riche en électrons) et pointe **vers** un site **accepteur** (pauvre en électrons, porteur d'une charge positive ou d'une charge partielle δ^+).

L'étape 1 est la **protonation** de l'atome d'oxygène du groupe carbonyle de la cétone par l'ion H^+ :

- **site donneur** : l'atome d'oxygène du groupe C=O de la cétone, qui porte deux **doublets non liants** et une charge partielle δ^- (l'oxygène est plus électronégatif que le carbone) ;
- **site accepteur** : l'ion H^+ , porteur d'une charge positive entière et dépourvu d'électron : il possède une **lacune électronique**.

**RÉPONSE**

La flèche courbe part d'un **doublet non liant de l'atome d'oxygène** du groupe carbonyle et pointe vers l'**ion H^+** , créant la liaison O–H. L'atome d'oxygène, qui partage désormais trois liaisons, porte alors une **charge formelle** +.

Q.9. Catégorie de réaction de l'étape 2**RAPPEL DE COURS**

Substitution : un atome ou un groupe d'atomes est *remplacé* par un autre. **Addition** : deux molécules s'unissent en une seule, une liaison *multiple* devenant une liaison simple, sans départ d'aucun groupe. **Élimination** : une seule molécule en donne deux, une liaison multiple se *formant*.

Dans l'étape 2, le résorcinol (site donneur, cycle aromatique riche en électrons) attaque l'atome de carbone du groupe carbonyle protoné (site accepteur). Le bilan de l'étape est le suivant : **deux** molécules réagissent et n'en donnent **qu'une seule** ; la double liaison C=O du carbonyle protoné devient une **liaison simple** C–OH ; une nouvelle liaison C–C est créée ; et **aucun** atome ni groupe d'atomes n'est éliminé de la molécule.

RÉPONSE

Ces caractéristiques sont exactement celles d'une réaction d'**ADDITION**.

Q.10. Définition d'un catalyseur

RÉPONSE

Un **catalyseur** est une espèce chimique qui **augmente la vitesse d'une transformation chimique** sans figurer dans l'équation de réaction : il est consommé au cours d'une étape du mécanisme puis **régénéré** lors d'une étape ultérieure.

- il n'apparaît **pas** dans le bilan de la réaction (on l'écrit au-dessus de la flèche) ;
- il n'est **pas consommé** globalement : une faible quantité suffit (ici $m_{\text{APTS}} = 0,18 \text{ g}$ seulement) ;
- il ne modifie **pas l'état final** du système : il n'a aucune influence sur le rendement théorique maximal, il ne fait qu'accélérer l'évolution vers cet état.

Q.11. Rôle de l'eau dans la cristallisation du produit brut

D'après le tableau des solubilités, le composé A est **insoluble dans l'eau**, alors qu'il est soluble à chaud dans le milieu réactionnel devenu liquide et homogène. L'ajout progressif d'eau distillée fait donc chuter la solubilité du composé A : la solution devient sursaturée et le composé A précipite.

RÉPONSE

L'eau joue le rôle de **contre-solvant** (solvant de précipitation) : elle **provoque la cristallisation du composé A**, insoluble dans l'eau. Elle dissout simultanément l'**APTS**, soluble dans l'eau, qui reste en solution et n'est donc pas entraîné dans les cristaux bruts.

Q.12. Espèces éliminées du solide après recristallisation

MÉTHODE

Dans une **recristallisation**, on dissout le solide brut dans un *minimum de solvant à chaud*, puis on refroidit. L'espèce recherchée, **peu soluble à froid**, cristallise seule ; les impuretés, *solubles à froid*, demeurent dans le solvant (les « eaux mères ») et sont éliminées lors de la filtration.

La transformation n'étant pas totale, le solide brut contient, outre le composé A, les réactifs n'ayant pas réagi ainsi que des traces de catalyseur :

Espèce	Eau	Éthanol	Devenir
Résorcinol	insoluble	soluble	reste dissous → éliminé
Acétoacétate d'éthyle	insoluble	soluble	reste dissous → éliminé
APTS	soluble	soluble	reste dissous → éliminé
Composé A	insoluble	peu soluble à froid	cristallise et est conservé

La perte de masse observée s'explique par le départ de ces impuretés, auquel s'ajoute une perte inévitable de composé A : celui-ci n'étant que « peu » soluble à froid, et non totalement insoluble, une petite fraction reste dissoute dans les eaux mères. C'est pourquoi le protocole précise d'utiliser une *très faible quantité de solvant*.

RÉPONSE

Les espèces éliminées du solide lors de la recristallisation sont le **résorcinol**, l'**acétoacétate d'éthyle** et l'**APTS**, tous trois solubles dans l'éthanol à froid et donc retenus dans les eaux mères.

Q.13. Montage utilisant une pression réduite et un entonnoir de Büchner

Le montage recherché est le seul à présenter simultanément les deux éléments caractéristiques d'une **filtration sous vide** : un **entonnoir de Büchner** (entonnoir à fond plat perforé, sur lequel on dispose un filtre rond) surmontant une **fiolle à vide** (erlenmeyer à parois épaisses muni d'une tubulure latérale), et un

raccordement latéral à un dispositif d'aspiration (trompe à eau ou pompe à vide) créant la dépression. Les deux autres montages ne conviennent pas : le **montage A** est une filtration par gravité (entonnoir conique et filtre plissé au-dessus d'un bécher), et le **montage C** est une ampoule de coulée ou à décanter, qui sert à l'ajout progressif d'un liquide ou à une décantation.

RÉPONSE

Le montage utilisant une pression réduite et un entonnoir de Büchner est le **montage B**.

Intérêt : la filtration sous pression réduite est **beaucoup plus rapide** que la filtration par gravité et permet d'obtenir un solide **mieux essoré**, donc plus rapidement sec.

Q.14. Vérification des proportions stœchiométriques**RAPPEL DE COURS**

Deux réactifs R_1 et R_2 , de nombres stœchiométriques ν_1 et ν_2 , sont introduits en proportions stœchiométriques si $\frac{n_1}{\nu_1} = \frac{n_2}{\nu_2}$. Ils sont alors *simultanément* totalement consommés si la transformation est totale : il n'y a aucun excès.

Quantités de matière introduites d'après le protocole :

$$n_r = \frac{m_r}{M_r} = \frac{2,20}{110} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}, \quad n_{AE} = \frac{m_{AE}}{M_{AE}} = \frac{2,60}{130} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}.$$

L'équation de la réaction montre que les deux réactifs réagissent **mole à mole** : leurs nombres stœchiométriques valent tous deux 1. On compare donc directement $\frac{n_r}{1}$ et $\frac{n_{AE}}{1}$.

RÉPONSE

$$\frac{n_r}{1} = \frac{n_{AE}}{1} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

Ces deux rapports étant égaux, les réactifs ont bien été introduits en **proportions stœchiométriques** : aucun n'est en excès et la quantité maximale de composé A vaut $n_{\max} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}$.

Q.15. Rendement η_2 de cette synthèse

Quantité de composé A effectivement obtenue (on conserve provisoirement trois chiffres significatifs pour ne pas propager d'erreur d'arrondi) :

$$n_A = \frac{m_A}{M_A} = \frac{2,0}{176} = 1,14 \times 10^{-2} \text{ mol}.$$

D'après la question Q.14, $n_{\max} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ mol}$, d'où :

$$\eta_2 = \frac{n_A}{n_{\max}} = \frac{1,14 \times 10^{-2}}{2,00 \times 10^{-2}} = 0,57.$$

Chiffres significatifs : la masse $m_A = 2,0 \text{ g}$ n'est donnée qu'avec **deux** chiffres significatifs ; le résultat ne peut donc en comporter davantage.

RÉPONSE

$\eta_2 = 0,57$ soit environ 57 %.

Q.16. Avantage et inconvénient de chaque voie de synthèse

MÉTHODE

Pour comparer deux protocoles de synthèse, on croise systématiquement quatre critères : **rendement**, **durée**, **conditions expérimentales** (température, sécurité, coût énergétique) et **impact environnemental** (chimie verte).

	Voie 1 (acide sulfamique)	Voie 2 (APTS)
Rendement	$\eta_1 \approx 65 \%$	$\eta_2 \approx 57 \%$
Durée	20 min	10 min
Température	130°C	60°C

RÉPONSE

Voie 1 — en présence d'acide sulfamique

- *Avantage* : le **rendement est nettement meilleur** (65 % contre 57 %). Pour une même quantité de réactifs engagés, on récupère davantage de composé A, ce qui limite le gaspillage de matière première.
- *Inconvénient* : la transformation exige une **température élevée** (130°C) : chauffage énergivore et coûteux, **risque accru** pour l'expérimentateur (brûlures, vapeurs), matériel adapté nécessaire.

Voie 2 — en présence d'APTS

- *Avantage* : les **conditions sont beaucoup plus douces** (bain-marie à 60°C pendant 10 min) : consommation d'énergie et risques fortement réduits, catalyseur employé en très faible quantité (0,18 g). Cette voie répond mieux aux principes de la **chimie verte**.
- *Inconvénient* : le **rendement est plus faible** (57 %), et le protocole impose une étape supplémentaire de **recristallisation**, qui allonge la manipulation et occasionne une perte de produit.

Conclusion : si l'objectif est de **maximiser la quantité de produit**, la voie 1 est préférable ; si l'on privilégie la **sécurité, l'économie d'énergie et le respect de l'environnement**, la voie 2 s'impose.

Exercice 2 — La scintigraphie cardiaque

(5 pts)

RAPPEL DE COURS

Données utiles : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$, $E = \frac{hc}{\lambda_v}$.
 Demi-vie du thallium 201 : $t_{1/2} = 3,04 \text{ jours}$; $1 \text{ jour} = 86400 \text{ s}$; activité injectée $A_0 = 78 \text{ MBq}$;
 $A(t) = \lambda N(t)$ et $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

Q.1. Type de désintégration du thallium 201

RAPPEL DE COURS

Radioactivité α : émission d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$. **Radioactivité β^-** : émission d'un électron ${}^0_{-1}\text{e}$ (Z augmente de 1). **Radioactivité β^+** : émission d'un positon ${}^0_{+1}\text{e}$ (Z diminue de 1). La *désexcitation* γ n'est pas une désintégration : elle accompagne les précédentes et ne modifie ni A ni Z .

L'équation de la transformation nucléaire s'écrit ${}^{201}_{81}\text{Tl} \rightarrow {}^{201}_{80}\text{Hg}^* + {}^0_{+1}\text{e}$. On vérifie les lois de conservation (lois de Soddy) : nombre de nucléons $201 = 201 + 0$; nombre de charge $81 = 80 + 1$. La particule émise, de nombre de masse $A = 0$ et de nombre de charge $Z = +1$, est donc un **positon** (antiparticule de l'électron), et le numéro atomique du noyau diminue d'une unité.

RÉPONSE

Il s'agit d'une désintégration de type β^+ .

Q.2. Expression et calcul de la longueur d'onde λ_v

À partir de $E = \frac{hc}{\lambda_v}$, on isole λ_v : $\lambda_v = \frac{hc}{E}$.

Conversion préalable de l'énergie en joules (indispensable pour rester cohérent avec les unités SI de h et c) :

$$E = 135 \text{ keV} = 135 \times 10^3 \times 1,60 \times 10^{-19} = 2,16 \times 10^{-14} \text{ J}.$$

Application numérique :

$$\lambda_v = \frac{6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{2,16 \times 10^{-14}} = \frac{1,989 \times 10^{-25}}{2,16 \times 10^{-14}} \approx 9,21 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

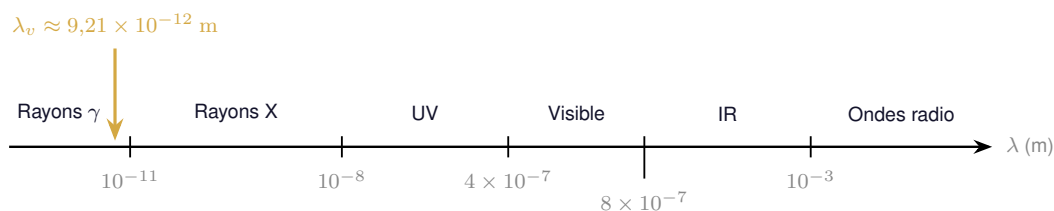
Contrôle d'homogénéité : $\frac{[h] \times [c]}{[E]} = \frac{\text{J} \cdot \text{s} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{J}} = \text{m}.$

RÉPONSE

$$\lambda_v = \frac{hc}{E} \approx 9,21 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Q.3. Domaine spectral du rayonnement émis

On place la valeur $\lambda_v \approx 9,21 \times 10^{-12} \text{ m}$ sur l'échelle des domaines spectraux fournie :



On compare : $9,21 \times 10^{-12} \text{ m} < 10^{-11} \text{ m}$. La longueur d'onde est donc inférieure à la borne supérieure du domaine des rayons γ .

RÉPONSE

Le rayonnement appartient au domaine des **rayons γ** . Ce résultat est cohérent avec l'énoncé, qui précise que le noyau $^{201}_{80}\text{Hg}^*$ se désexcite en émettant un photon γ , et avec le principe même de la scintigraphie, qui repose sur la détection de rayons γ par une caméra à scintillation.

Q.4. Méthode de protection contre les rayonnements ionisants

La radioprotection repose sur trois leviers : le **temps** d'exposition, la **distance** à la source et l'**écran** interposé.

RÉPONSE

On peut citer par exemple l'une des méthodes suivantes (une seule suffisait) :

- **interposer un écran absorbant** entre la source et l'opérateur : les rayons γ étant très pénétrants, on utilise des matériaux denses et de numéro atomique élevé, comme le **plomb** (tablier plombé, paravent, parois de la salle) ou le béton ;
- **augmenter la distance** à la source : l'intensité du rayonnement décroît comme l'inverse du carré de la distance ;
- **limiter la durée d'exposition** : la dose reçue est proportionnelle au temps passé à proximité de la source.

Q.5. Relation entre l'activité $A(t)$ et $\frac{dN(t)}{dt}$

Par définition, l'activité $A(t)$ est le **nombre de désintégrations par unité de temps** dans l'échantillon. Or, pendant une durée dt , la variation du nombre de noyaux radioactifs vaut $dN(t)$; chaque désintégration faisant *disparaître* un noyau, cette variation est **négative** : $dN(t) < 0$. Le nombre de désintégrations survenues pendant dt vaut donc $-dN(t)$, quantité positive.

RÉPONSE

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}.$$

ATTENTION

Le **signe moins** est indispensable. Sans lui, l'activité serait négative, ce qui n'a aucun sens physique : une activité s'exprime en becquerels (1 Bq = 1 désintégration par seconde) et est nécessairement positive.

Q.6. Établissement de l'équation différentielle

On dispose de deux expressions de la même grandeur $A(t)$: d'après la question Q.5, $A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$; d'après la loi rappelée dans l'énoncé, $A(t) = \lambda N(t)$. En égalant ces deux expressions puis en ajoutant $\frac{dN(t)}{dt}$ aux deux membres :

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \iff \frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0.$$

RÉPONSE

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène, à coefficients constants.

Q.7. Vérification que $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ est solution**MÉTHODE**

Pour montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle : **(1)** on *dérive* la fonction proposée ; **(2)** on la *reporte* avec sa dérivée dans le membre de gauche ; **(3)** on *vérifie* que ce membre est nul, puis on contrôle la *condition initiale*.

La fonction N est dérivable sur $[0; +\infty[$. En utilisant la dérivée de $t \mapsto e^{u(t)}$, qui vaut $u'(t) e^{u(t)}$ avec ici $u(t) = -\lambda t$ et $u'(t) = -\lambda$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = N_0 \times (-\lambda) e^{-\lambda t} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

En reportant dans l'équation différentielle :

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} + \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} (-1 + 1) = 0.$$

De plus, à la date $t = 0$: $N(0) = N_0 e^0 = N_0$, ce qui correspond bien au nombre de noyaux radioactifs initialement présents.

RÉPONSE

Le membre de gauche est nul pour tout $t \geq 0$ et la condition initiale est respectée : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ est bien la solution de l'équation différentielle vérifiant $N(0) = N_0$.

Q.8. Expression de la constante radioactive λ et calcul**RAPPEL DE COURS**

La **demi-vie** (ou période radioactive) $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux radioactifs initialement présents a été **divisé par deux** : $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$.

En appliquant cette définition à la solution trouvée en Q.7 :

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \iff e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \iff -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}},$$

la deuxième équivalence s'obtenant en composant par la fonction logarithme népérien, strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Application numérique, après conversion de la demi-vie en secondes ($t_{1/2} = 3,04 \times 86400 = 2,63 \times 10^5$ s) :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{2,63 \times 10^5} = \frac{0,693}{2,627 \times 10^5} \approx 2,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

RÉPONSE

$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx 2,64 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$: on retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé.

Q.9. Activité restante deux heures après l'injection

La durée vaut $t = 2,0 \text{ h} = 7,2 \times 10^3 \text{ s}$. En appliquant la loi de décroissance radioactive $A_r = A_0 e^{-\lambda t}$, avec $\lambda t = 2,64 \times 10^{-6} \times 7,2 \times 10^3 = 1,90 \times 10^{-2}$:

$$A_r = 78 \times e^{-1,90 \times 10^{-2}} = 78 \times 0,981 = 76,5 \text{ MBq}.$$

La diminution relative vaut $\frac{A_0 - A_r}{A_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - 0,981 = 1,9 \times 10^{-2}$, soit environ 2 %. Ce résultat était prévisible : la durée considérée ($\approx 2 \text{ h}$) est très petite devant la demi-vie ($t_{1/2} = 3,04 \text{ jours} \approx 73 \text{ h}$).

RÉPONSE

$$A_r \approx 77 \text{ MBq}.$$

Conclusion. Deux heures après l'injection — c'est-à-dire bien après la fin de l'examen, qui ne dure que 15 à 30 minutes — l'activité n'a diminué que d'environ 2 %. Le patient reste donc une source de rayonnement notable : la seule décroissance radioactive ne suffit pas à éliminer rapidement le traceur.

Q.10. Durée $t_{1\%}$ au bout de laquelle l'activité vaut 1 % de A_0

On cherche la date $t_{1\%}$ telle que $A(t_{1\%}) = 0,01 A_0$:

$$A_0 e^{-\lambda t_{1\%}} = 0,01 A_0 \iff e^{-\lambda t_{1\%}} = 0,01 \iff -\lambda t_{1\%} = \ln(0,01) \iff t_{1\%} = \frac{\ln(100)}{\lambda}.$$

Application numérique :

$$t_{1\%} = \frac{4,605}{2,64 \times 10^{-6}} = 1,74 \times 10^6 \text{ s}, \quad \frac{1,74 \times 10^6}{86400} \approx 20 \text{ jours}.$$

Vérification par une seconde méthode, en raisonnant en demi-vies puisque $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$: $t_{1\%} = \frac{\ln 100}{\ln 2} \times t_{1/2} = 6,64 \times 3,04 \approx 20,2 \text{ jours}$. Les deux méthodes concordent.

RÉPONSE

$$t_{1\%} \approx 20 \text{ jours}.$$

Justification de la consigne d'hydratation. Si l'élimination du thallium 201 ne reposait que sur la décroissance radioactive, il faudrait près de trois semaines pour que l'activité tombe à 1 % de sa valeur initiale, alors que l'examen est terminé au bout de 30 minutes. Boire beaucoup d'eau ajoute à cette élimination physique une **élimination biologique** par voie urinaire, bien plus rapide : la combinaison des deux processus réduit fortement la durée de présence du traceur dans l'organisme, donc la **dose totale de rayonnement reçue** par le patient. C'est une mesure élémentaire de radioprotection.

Exercice 3 — La saga de la découverte des trous noirs

(6 pts)

RAPPEL DE COURS

Données utiles : constante de gravitation universelle $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; masse du Soleil $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$; rayon de l'orbite de l'étoile fictive S_f : $r = 1,74 \times 10^{11} \text{ km}$; période de révolution de l'étoile S2 : $T = 19 \text{ ans}$.

Q.1. Comparaison des vitesses de l'étoile S2 en 2002 et en 1993

RAPPEL DE COURS

Deuxième loi de Kepler (loi des aires) : le rayon vecteur reliant le foyer occupé par l'astre attracteur à l'étoile balaie des **aires égales pendant des durées égales**.

Lecture de la Figure 1. Le trou noir SgrA* occupe le foyer F_1 . En **2002**, l'étoile S2 se trouve à l'extrémité du grand axe la plus *proche* de F_1 : elle est au **périastre** et la distance F_1S_2 est minimale. En **1993**, elle est à l'extrémité opposée, la plus *éloignée* de F_1 : elle est à l'**apoastre** et cette distance est maximale.

Raisonnement. Considérons deux durées Δt égales, l'une autour de 2002, l'autre autour de 1993 : d'après la deuxième loi de Kepler, les aires balayées sont égales. Or l'aire balayée peut être assimilée à celle d'un triangle de « base » la distance parcourue sur l'orbite et de « hauteur » la distance F_1S_2 :

$$\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} \times d_{F_1S_2} \times \ell, \quad \text{avec } \ell = v \Delta t.$$

Pour que le produit $d_{F_1S_2} \times v \Delta t$ conserve la même valeur alors que $d_{F_1S_2}$ est *plus petite* en 2002, il faut nécessairement que la longueur parcourue ℓ — donc la vitesse v — soit *plus grande*.

Confirmation graphique. Au voisinage de 2002, les positions relevées à des dates rapprochées (2001, 2001,5, 2002, 2002,2) sont très espacées sur l'orbite, tandis qu'au voisinage de 1993 les relevés séparés de plusieurs années (1992, 1993, 1995) sont resserrés.

RÉPONSE

L'étoile S2 étant plus proche de SgrA* en 2002 qu'en 1993, la loi des aires impose qu'elle parcoure une plus grande distance pendant la même durée : $v_{2002} > v_{1993}$.

Q.2. Période de révolution T de l'étoile S2

MÉTHODE

On exploite la **symétrie de l'ellipse** : entre le passage au périastre et le passage à l'apoastre — les deux extrémités du grand axe — l'étoile décrit exactement **une demi-orbite**. La durée séparant ces deux passages vaut donc $\frac{T}{2}$.

Le segment tracé sur la Figure 1 joignant les deux extrémités de l'orbite est le **grand axe** de l'ellipse : il passe par les deux foyers F_1 et F_2 . Ses extrémités correspondent à l'**apoastre**, atteint aux alentours de l'année 1992,8 (entre les relevés 1992 et 1993), et au **périastre**, atteint aux alentours de 2002,3 (juste après le relevé 2002,2). L'étoile parcourt une demi-orbite entre ces deux dates :

$$\frac{T}{2} = 2002,3 - 1992,8 \approx 9,5 \text{ ans}, \quad T = 2 \times 9,5.$$

RÉPONSE

$T \approx 19 \text{ ans}$: la période de révolution de l'étoile S2 autour de SgrA* est bien de l'ordre de 19 ans.

ATTENTION

Il s'agit d'une **détermination graphique** : la précision de lecture des dates sur la figure est de l'ordre de quelques dixièmes d'année, ce qui se répercute en une incertitude d'environ ± 1 an sur T . L'énoncé demande d'ailleurs prudemment un *ordre de grandeur* (« de l'ordre de 19 ans »), et non une valeur exacte.

Q.3. Vecteur accélération de l'étoile fictive S_f **RAPPEL DE COURS**

Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$.

Système : l'étoile fictive S_f , de masse m_f , assimilée à un point matériel. *Référentiel* : le référentiel galiléen d'origine SgrA*. *Bilan des forces* : l'énoncé précise que S_f n'est soumise qu'à la force d'interaction gravitationnelle exercée par SgrA*, de masse M :

$$\vec{F}_{\text{SgrA}^*/S_f} = \frac{G M m_f}{r^2} \vec{u}_n.$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_n$ étant dirigé de l'étoile *vers le centre* de la trajectoire, c'est-à-dire vers SgrA*, il porte bien le caractère **attractif** de la force gravitationnelle : aucun signe négatif n'est nécessaire. En appliquant la deuxième loi de Newton puis en simplifiant par la masse m_f (non nulle) :

$$\frac{G M m_f}{r^2} \vec{u}_n = m_f \vec{a}.$$

RÉPONSE

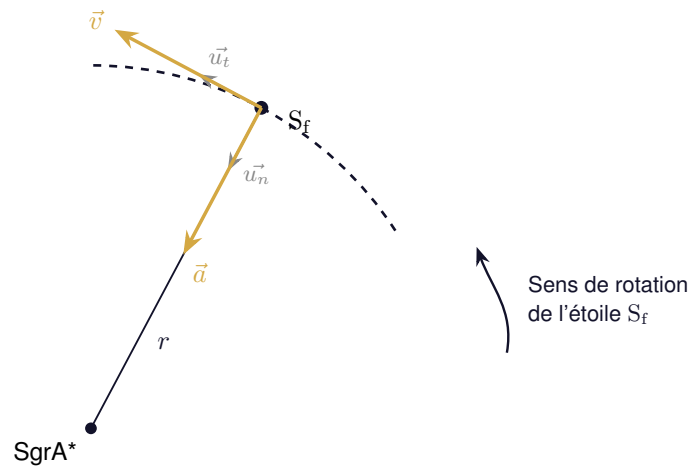
$$\vec{a} = \frac{G M}{r^2} \vec{u}_n.$$

ATTENTION

La masse m_f de l'étoile fictive **disparaît** de l'expression finale. C'est une conséquence de l'égalité entre masse grave et masse inerte : le mouvement d'un satellite ne dépend *pas* de sa propre masse, mais uniquement de la masse de l'astre attracteur et du rayon de l'orbite. C'est précisément ce qui permet, en Q.8, de remonter à la masse M du trou noir sans rien connaître de l'étoile.

Q.4. Représentation des vecteurs vitesse et accélération

Le vecteur **vitesse** $\vec{v}$ est toujours *tangent à la trajectoire* et orienté dans le sens du mouvement : il est colinéaire et de même sens que $\vec{u}_t$. Le vecteur **accélération** $\vec{a}$ est, d'après la question Q.3, colinéaire et de même sens que $\vec{u}_n$: il est dirigé *vers le centre* de la trajectoire, c'est-à-dire vers SgrA*. On dit qu'il est **centripète**.

**RÉPONSE**

Au point S_f , $\vec{v}$ est porté par $\vec{u}_t$ (tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement) et $\vec{a}$ est porté par $\vec{u}_n$ (dirigé vers SgrA*). Les deux vecteurs sont **orthogonaux**.

Q.5. Caractère uniforme du mouvement**RAPPEL DE COURS**

Pour un mouvement circulaire de rayon r , le vecteur accélération se décompose dans la base de Frenet selon $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$, le premier terme étant la composante *tangentielle* et le second la composante *normale*.

Identifions les deux expressions du vecteur accélération dont nous disposons :

$$\frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n = 0 \times \vec{u}_t + \frac{GM}{r^2} \vec{u}_n.$$

La base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ étant **orthonormée**, la décomposition d'un vecteur y est **unique** : on peut donc identifier les composantes une à une. La projection sur $\vec{u}_t$ donne :

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

La dérivée de la vitesse par rapport au temps est nulle à chaque instant : la valeur v de la vitesse est donc **constante** au cours du mouvement.

RÉPONSE

La trajectoire est **circulaire** (hypothèse de l'énoncé) et la valeur de la vitesse est **constante** : le mouvement de l'étoile S_f est donc **circulaire uniforme**.

ATTENTION

« Mouvement uniforme » ne signifie **pas** « accélération nulle ». Ici la valeur de la vitesse est constante, mais la *direction* du vecteur vitesse change en permanence : le vecteur $\vec{v}$ n'est donc pas constant, et l'accélération, purement *normale* (centripète), est bien non nulle.

Q.6. Expression de la vitesse v de l'étoile S_f

Reprenons l'identification menée en Q.5, cette fois sur la composante normale :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \iff v^2 = \frac{GM}{r}.$$

La valeur de la vitesse étant une grandeur **positive**, on prend la racine carrée positive.

Contrôle d'homogénéité :

$$\sqrt{\frac{\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{kg}}{\text{m}}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

RÉPONSE

$$v = \sqrt{\frac{G M}{r}}.$$

La vitesse ne dépend que de la masse M du trou noir et du rayon r de l'orbite : plus l'étoile est proche, plus elle est rapide.

Q.7. Démonstration de la troisième loi de Kepler

Le mouvement étant circulaire uniforme, l'étoile parcourt la circonférence du cercle, de longueur $2\pi r$, pendant une durée égale à la période de révolution T : $v = \frac{2\pi r}{T}$. En identifiant avec l'expression obtenue en Q.6, puis en élevant au carré (les deux membres étant strictement positifs) :

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{G M}{r}} \iff \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G M}{r} \iff 4\pi^2 r^3 = G M T^2.$$

En divisant les deux membres par $G M r^3$ (quantité non nulle) :

RÉPONSE

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M}.$$

Le membre de droite ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur : le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est donc le **même pour tous les astres** en orbite autour de SgrA*, indépendamment de leur masse.

Q.8. Masse M du trou noir SgrA*

Expression littérale. On isole M dans la troisième loi de Kepler établie en Q.7 :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M} \iff G M T^2 = 4\pi^2 r^3 \iff M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}.$$

Conversion des données en unités SI. Le rayon est fourni en **kilomètres** et la période en **années** :

$$r = 1,74 \times 10^{11} \text{ km} = 1,74 \times 10^{14} \text{ m}, \quad T = 19 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 6,00 \times 10^8 \text{ s}.$$

Application numérique :

$$M = \frac{4\pi^2 \times (1,74 \times 10^{14})^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (6,00 \times 10^8)^2} = \frac{39,48 \times 5,27 \times 10^{42}}{6,67 \times 10^{-11} \times 3,60 \times 10^{17}} = \frac{2,08 \times 10^{44}}{2,40 \times 10^7} = 8,66 \times 10^{36} \text{ kg}.$$

Conversion en masses solaires, pour comparer à la valeur de l'article :

$$\frac{M}{M_S} = \frac{8,66 \times 10^{36}}{1,99 \times 10^{30}} = 4,35 \times 10^6.$$

Comparaison. L'article de *Sciences et Avenir* annonce environ 4,4 millions de masses solaires ; l'écart relatif vaut :

$$\frac{|M_{\text{calculée}} - M_{\text{article}}|}{M_{\text{article}}} = \frac{|4,35 - 4,40| \times 10^6}{4,40 \times 10^6} \approx 1,1 \times 10^{-2}, \quad \text{soit environ } 1 \%.$$

RÉPONSE

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \approx 8,7 \times 10^{36} \text{ kg} \approx 4,4 \times 10^6 M_S .$$

Commentaire. L'accord avec l'article est **excellent** : l'écart, de l'ordre de 1 %, est très inférieur à l'incertitude affectant notre calcul. Celle-ci provient essentiellement de la **détermination graphique de la période T** à la question Q.2 (précision d'environ ± 1 an, soit 5 %) ; comme M dépend de T^2 , une erreur de 5 % sur T entraîne à elle seule une erreur d'environ 10 % sur M . Le résultat obtenu **confirme donc la valeur annoncée**. Ce calcul illustre une démarche fondamentale de l'astrophysique : le trou noir SgrA* est par nature *invisible*, mais l'observation du mouvement des étoiles qui l'orbitent, interprétée à l'aide des lois de Newton et de Kepler, permet d'en **mesurer la masse**. C'est ce travail qui a valu à Reinhard Genzel et Andrea Ghez le prix Nobel de physique en 2020.