

Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques
Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2 — Sujet 26-MATJ2PO1
Polynésie

Exercice 1 — Probabilités

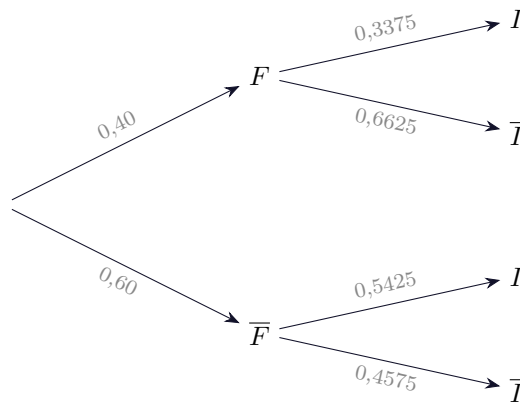
(5 pts)

Partie A

RAPPEL

$P(F) = 0,40$, $P(\bar{F}) = 0,60$; $P_F(I) = 0,3375$ et $P_{\bar{F}}(I) = 0,5425$.

1. Arbre pondéré



2. Probabilité $P(F \cap I)$

$$P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = 0,40 \times 0,3375 = 0,135.$$

RÉPONSE

La probabilité que l'élève soit une fille envisageant des études d'ingénieur est $P(F \cap I) = 0,135$.

3. Démonstration de $P(I) = 0,4605$

MÉTHODE

Les événements F et \bar{F} forment une partition de l'univers : la formule des probabilités totales donne $P(I) = P(F \cap I) + P(\bar{F} \cap I)$.

$$P(\bar{F} \cap I) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(I) = 0,60 \times 0,5425 = 0,3255.$$

$$P(I) = P(F \cap I) + P(\bar{F} \cap I) = 0,135 + 0,3255 = 0,4605.$$

RÉPONSE

La probabilité que l'élève envisage des études d'ingénieur est $P(I) = 0,4605$.

4. Probabilité $P_I(F)$

$$P_I(F) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0,135}{0,4605} \approx 0,293.$$

RÉPONSE

Sachant que l'élève envisage des études d'ingénieur, la probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $P_I(F) \approx 0,293$.

Partie B**RAPPEL**

On interroge n filles assimilées à des tirages indépendants avec remise ; la probabilité qu'une fille souhaite devenir ingénieure vaut 0,15.

1.a. X suit une loi binomiale**RÉPONSE**

On répète n fois, de façon identique et indépendante, une même expérience de Bernoulli à deux issues : « la fille souhaite devenir ingénieure » (succès, probabilité $p = 0,15$) ou non (échec). X comptant le nombre de succès, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,15)$.

1.b. Espérance de X **RÉPONSE**

$$E(X) = np = 0,15n.$$

2. Plus petit nombre de lycéennes à interroger

L'événement « au moins une fille souhaite devenir ingénieure » est l'événement contraire de « aucune fille ne le souhaite », de probabilité $P(X = 0) = (1 - 0,15)^n = 0,85^n$. On résout :

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - 0,85^n \geq 0,99 \iff 0,85^n \leq 0,01.$$

La fonction \ln étant strictement croissante :

$$0,85^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,85) \leq \ln(0,01) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)}$$

(le sens de l'inégalité change car $\ln(0,85) < 0$). Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)} \approx 28,34$.

RÉPONSE

Le plus petit entier convenant est $n = 29$: il faut interroger au moins **29 lycéennes**. (On vérifie $0,85^{29} \approx 0,009 \leq 0,01$ alors que $0,85^{28} \approx 0,011 > 0,01$.)

3. Cas $n = 29$: au moins le quart des filles

Ici X suit la loi $\mathcal{B}(29; 0,15)$. Le quart de l'effectif vaut $\frac{29}{4} = 7,25$; « au moins le quart » signifie donc $X \geq 8$ (X étant entier). On calcule :

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,941 \approx 0,059.$$

RÉPONSE

$$P(X \geq 8) \approx 0,059.$$

Partie C

RAPPEL

X_1, \dots, X_{10} indépendantes, de même espérance $E(X_i) = 225$ et de même variance $V(X_i) = 191,25$; $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$.

1. Interprétation de S **RÉPONSE**

S représente le nombre total de filles envisageant de devenir ingénieure parmi les 15 000 lycéennes interrogées sur l'ensemble des dix académies.

2. Espérance et variance de S

Par linéarité de l'espérance et par indépendance des variables (la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances) :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10 \times 225 = 2250,$$

$$V(S) = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) = 10 \times 191,25 = 1912,5.$$

RÉPONSE

$E(S) = 2250$ et $V(S) = 1912,5$.

3. Étude de l'affirmation**MÉTHODE**

L'événement $2000 < S < 2500$ est centré sur $E(S) = 2250$: il s'écrit $|S - 2250| < 250$. On majore la probabilité de l'événement contraire avec l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev : $P(|S - E(S)| \geq a) \leq \frac{V(S)}{a^2}$.

Avec $a = 250$:

$$P(|S - 2250| \geq 250) \leq \frac{V(S)}{250^2} = \frac{1912,5}{62\,500} = 0,0306.$$

Par passage à l'événement contraire :

$$P(2000 < S < 2500) = P(|S - 2250| < 250) \geq 1 - 0,0306 = 0,9694 > 0,95.$$

RÉPONSE

L'affirmation est **VRAIE** : la probabilité que le nombre total de filles soit strictement compris entre 2000 et 2500 est au moins égale à 0,9694, donc supérieure à 0,95.

Exercice 2 — Fonction logarithme et suite

(5 pts)

Partie A

RAPPEL

 $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$ sur $[4; 10]$.
1. Expression de $f'(x)$

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 8x^3 - 1 > 0$ sur $[4; 10]$ et $u'(x) = 24x^2$. Ainsi $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{24x^2}{8x^3 - 1}$. Or $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

RÉPONSE

Pour tout $x \in [4; 10]$, $f'(x) = \frac{24x^2}{(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)}$.

2.a. Sens de variation de f

Sur $[4; 10]$, $24x^2 > 0$, $2x - 1 > 0$ et $4x^2 + 2x + 1 > 0$: $f'(x) > 0$.

RÉPONSE

$f'(x) > 0$ sur $[4; 10]$: f est strictement croissante sur cet intervalle.

2.b. Encadrement $4 \leq f(x) \leq 10$

x	4	10
$f'(x)$	+	
f	$f(4)$	$f(10)$

\nearrow

f étant croissante, pour tout $x \in [4; 10]$ on a $f(4) \leq f(x) \leq f(10)$. Or $f(4) = \ln(511) \approx 6,24$ et $f(10) = \ln(7999) \approx 8,99$. Donc $4 \leq 6,24 \leq f(x) \leq 8,99 \leq 10$.

RÉPONSE

Pour tout $x \in [4; 10]$, $4 \leq f(x) \leq 10$.

3.a. Existence et unicité de la solution de $g(x) = 0$

MÉTHODE

g est continue (somme de fonctions continues) et strictement décroissante sur $[4; 10]$; si g change de signe entre les bornes, le théorème des valeurs intermédiaires (version fonction strictement monotone) assure l'existence d'une *unique* solution.

$g(x) = f(x) - x$. On calcule :

$$g(4) = f(4) - 4 \approx 2,24 > 0, \quad g(10) = f(10) - 10 \approx -1,01 < 0.$$

g est continue et strictement décroissante sur $[4; 10]$, et 0 est compris entre $g(10)$ et $g(4)$.

RÉPONSE

L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[4; 10]$.

3.b. Encadrement de α à 10^{-3} près

À la calculatrice, $g(8,499) \approx 8,3 \times 10^{-5} > 0$ et $g(8,500) \approx -5,6 \times 10^{-4} < 0$. Comme g est décroissante :

RÉPONSE

$8,499 \leq \alpha \leq 8,500$.

Partie B**RAPPEL**

$u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Valeur approchée de u_1

$u_1 = f(u_0) = f(5) = \ln(8 \times 125 - 1) = \ln(999) \approx 6,9$.

RÉPONSE

$u_1 \approx 6,9$.

2.a. Récurrence : $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 5$ et $u_1 \approx 6,9$, donc $4 \leq 5 \leq 6,9 \leq 10$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ pour un entier n fixé. f étant croissante sur $[4; 10]$, on applique f en conservant l'ordre :

$$f(4) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10).$$

Or, d'après la partie A, $4 \leq f(4)$ et $f(10) \leq 10$, et par définition $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$; d'où :

$$4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10.$$

La propriété est héréditaire.

RÉPONSE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

2.b. Convergence de (u_n) **RÉPONSE**

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ montre que (u_n) est croissante ; l'inégalité $u_n \leq 10$ montre qu'elle est majorée par 10. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) **converge**.

3. Limite de (u_n)

(u_n) converge vers un réel ℓ avec $4 \leq \ell \leq 10$. La fonction f étant continue sur $[4; 10]$, en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0$. Or α est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $[4; 10]$.

RÉPONSE

La suite (u_n) converge vers α .

Partie C**RAPPEL**

On admet $8,4 \leq \alpha \leq 8,5$. La fonction `alpha` compte le nombre d'itérations $u \leftarrow f(u)$ (depuis $u = 5$) tant que $u < a$.

1. Interprétation de `alpha (8 . 499)` = 11**RÉPONSE**

Il faut 11 itérations à partir de $u_0 = 5$ pour que le terme de la suite dépasse pour la première fois 8,499 : c'est le plus petit entier n tel que $u_n \geq 8,499$ (autrement dit u_{11} est le premier terme $\geq 8,499$).

2. Pourquoi `alpha (8 . 6)` ne renvoie aucune valeur**RÉPONSE**

La suite (u_n) est croissante et converge vers $\alpha \leq 8,5 < 8,6$: tous ses termes restent strictement inférieurs à 8,6. La condition $u < 8.6$ de la boucle `while` reste donc *toujours* vraie : la boucle ne s'arrête jamais (boucle infinie) et l'instruction `return n` n'est jamais atteinte.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace

(5 pts)

RAPPEL
 $A(-1; 1; 1), B(1; -6; -1), C(-5; 2; 3).$
1.a. Les points A, B, C ne sont pas alignés

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si ces vecteurs étaient colinéaires, on aurait $\vec{AB} = k \vec{AC}$; la première coordonnée donnerait $2 = -4k$, soit $k = -\frac{1}{2}$, mais alors la deuxième coordonnée vaudrait $-\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \neq -7$.

RÉPONSE

\vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires : les points A, B, C ne sont pas alignés.

1.b. \vec{n} normal au plan (ABC)

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AB} &= 6 \times 2 + (-2) \times (-7) + 13 \times (-2) = 12 + 14 - 26 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 6 \times (-4) + (-2) \times 1 + 13 \times 2 = -24 - 2 + 26 = 0. \end{aligned}$$

RÉPONSE

$\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à (ABC) .

1.c. Équation cartésienne de (ABC)

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ est normal au plan, celui-ci admet une équation de la forme $6x - 2y + 13z + d = 0$.

Le point $A(-1; 1; 1)$ y appartient :

$$6 \times (-1) - 2 \times 1 + 13 \times 1 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5.$$

RÉPONSE

Une équation cartésienne de (ABC) est $6x - 2y + 13z - 5 = 0$.

2. Les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires

Un vecteur normal de (P) est $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_P = 6 \times 8 + (-2) \times (-2) + 13 \times (-4) = 48 + 4 - 52 = 0.$$

RÉPONSE

Les vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}_P sont orthogonaux : les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. Intersection de (d) et de (ABC)

Un point de (d) a pour coordonnées $(-4 + t; -11 + 6t; 2 - t)$. Il appartient à (ABC) lorsque :

$$6(-4 + t) - 2(-11 + 6t) + 13(2 - t) - 5 = 0.$$

On développe :

$$-24 + 6t + 22 - 12t + 26 - 13t - 5 = 0 \iff -19t + 19 = 0 \iff t = 1.$$

Cette équation admet une unique solution $t = 1$: l'intersection est donc réduite à un seul point. Pour $t = 1$: $x = -3, y = -5, z = 1$.

RÉPONSE

(d) coupe (ABC) en l'unique point $E(-3; -5; 1)$.

4.a. H est le projeté orthogonal de A sur (d)

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

H appartient à (d) : pour $t = 2$, on a $(-4 + 2; -11 + 12; 2 - 2) = (-2; 1; 0)$, soit H .
 \vec{AH} est orthogonal à (d) :

$$\vec{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AH} \cdot \vec{u} = -1 \times 1 + 0 \times 6 + (-1) \times (-1) = -1 + 1 = 0.$$

RÉPONSE

H appartient à (d) et \vec{AH} est orthogonal à un vecteur directeur de (d) : H est le projeté orthogonal de A sur (d) .

4.b. Distance de A à la droite (d)

La distance de A à (d) est la longueur AH :

$$AH = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

RÉPONSE

$$d(A, (d)) = AH = \sqrt{2}.$$

4.c. Triangle AHE rectangle et son aire

H étant le projeté orthogonal de A sur (d) et E appartenant à (d) , le segment $[HE]$ est porté par (d) ;
 \vec{AH} étant orthogonal à (d) , on a $\vec{AH} \perp \vec{HE}$. Vérification :

$$\vec{HE} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AH} \cdot \vec{HE} = (-1) \times (-1) + 0 \times (-6) + (-1) \times 1 = 1 - 1 = 0.$$

Le triangle AHE est donc rectangle en H . Son aire vaut :

$$\mathcal{A}_{AHE} = \frac{1}{2} \times AH \times HE = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{38} = \frac{1}{2} \sqrt{76} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{19} = \sqrt{19}.$$

RÉPONSE

Le triangle AHE est rectangle en H et son aire est égale à $\sqrt{19}$ unités d'aire.

Exercice 4 — Vrai/Faux

(5 pts)

Affirmation 1

RAPPEL

 $f(x) = x e^{x^2}$ sur \mathbb{R} . Affirmation : f est concave sur $] -\infty ; 0]$.

f est un produit ($u = x$, $v = e^{x^2}$) : $f'(x) = e^{x^2} + x \times 2x e^{x^2} = (1 + 2x^2) e^{x^2}$. On dérive de nouveau :

$$f''(x) = 4x e^{x^2} + (1 + 2x^2) \times 2x e^{x^2} = 2x(2x^2 + 3) e^{x^2}.$$

Sur $] -\infty ; 0]$, $2x \leq 0$, tandis que $2x^2 + 3 > 0$ et $e^{x^2} > 0$. Donc $f''(x) \leq 0$.

RÉPONSE

Affirmation 1 **VRAIE** : $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty ; 0]$, donc f y est concave.

Affirmation 2

MÉTHODE

On répartit 24 rapaces dans 3 groupes *numérotés* (donc distincts) de 8 chacun : on choisit successivement les 8 du groupe 1, puis les 8 du groupe 2 parmi les restants, les 8 derniers formant le groupe 3.

$$\binom{24}{8} \times \binom{16}{8} \times \binom{8}{8} = \frac{24!}{8!16!} \times \frac{16!}{8!8!} \times 1 = \frac{24!}{8! \times 8! \times 8!} = \frac{24!}{(8!)^3}.$$

RÉPONSE

Affirmation 2 **VRAIE** : comme les groupes sont numérotés, le nombre de répartitions est bien $\frac{24!}{(8!)^3}$.

Affirmation 3

RAPPEL

f est solution de $y' = -y + 1$ sur \mathbb{R} et $g(x) = f(x) - 1$.

g est dérivable et $g'(x) = f'(x)$. Comme f vérifie $f'(x) = -f(x) + 1$:

$$g'(x) = f'(x) = -f(x) + 1 = -(f(x) - 1) = -g(x).$$

RÉPONSE

Affirmation 3 **VRAIE** : $g' = -g$.

Affirmation 4

RAPPEL

$u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ pour tout entier naturel n non nul. Affirmation : (u_n) n'admet pas de limite.

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement (« théorème des gendarmes »), (u_n) converge vers 0.

RÉPONSE

Affirmation 4 **FAUSSE** : la suite (u_n) admet une limite, égale à 0.

Affirmation 5**RAPPEL**

Parabole \mathcal{P} : $y = -x^2 + 4x + 1$ et droite \mathcal{D} : $y = x + 1$. Affirmation : l'aire du domaine grisé est égale à 6,5 unités d'aire.

Abscisses des points d'intersection :

$$-x^2 + 4x + 1 = x + 1 \iff -x^2 + 3x = 0 \iff x(-x + 3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Sur $[0; 3]$, $-x^2 + 3x \geq 0$: la parabole est au-dessus de la droite. L'aire du domaine grisé vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^3 [(-x^2 + 4x + 1) - (x + 1)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx. \\ \mathcal{A} &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = -\frac{27}{3} + \frac{3 \times 9}{2} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

RÉPONSE

Affirmation 5 **FAUSSE** : l'aire du domaine grisé vaut $\frac{9}{2} = 4,5$ unités d'aire, et non 6,5.