

Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2

Métropole — La Réunion — 9 septembre 2026

Exercice 1 — Probabilités

(5 pts)

Partie A

RAPPEL

Une joueuse réussit 60 % de ses lancers francs. Les lancers sont assimilés à une succession d'épreuves aléatoires **identiques** et **indépendantes**.

1.a. Justifions que X suit une loi binomiale

MÉTHODE

Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ lorsqu'elle compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p .

La joueuse effectue 5 lancers consécutifs. Chaque lancer constitue une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le lancer est réussi », de probabilité $p = 0,6$. D'après l'énoncé, ces 5 épreuves sont identiques et indépendantes, et la variable aléatoire X compte le nombre de succès.

RÉPONSE

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$, notée $\mathcal{B}(5; 0,6)$.

1.b. Donnons $P(X \geq 4)$ et interprétons

MÉTHODE

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Comme X prend au plus la valeur 5, on a $\{X \geq 4\} = \{X = 4\} \cup \{X = 5\}$, réunion d'événements incompatibles.

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} (0,6)^4 (0,4)^1 + \binom{5}{5} (0,6)^5.$$

$$P(X \geq 4) = 5 \times 0,1296 \times 0,4 + 0,07776 = 0,2592 + 0,07776 = 0,33696.$$

RÉPONSE

$P(X \geq 4) \approx 0,34$ (à 10^{-2} près).

Interprétation : lorsque la joueuse effectue 5 lancers francs, elle a environ 34 % de chances d'en réussir au moins 4.

2.a. Montrons que $P(Y \geq 1) = 1 - 0,4^n$

MÉTHODE

On passe par l'événement contraire : $\overline{\{Y \geq 1\}} = \{Y = 0\}$.

Y suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,6)$, donc :

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} (0,6)^0 (0,4)^{n-0} = 1 \times 1 \times 0,4^n = 0,4^n.$$

Par passage à l'évènement contraire :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,4^n.$$

RÉPONSE

Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $P(Y \geq 1) = 1 - 0,4^n$.

2.b. Déterminons le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) > 0,9999$

MÉTHODE

On résout l'inéquation à l'aide de la fonction $\ln$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Attention : $\ln(0,4) < 0$, donc la division par $\ln(0,4)$ **change le sens** de l'inégalité.

$$1 - 0,4^n > 0,9999 \iff 0,4^n < 0,0001 \iff \ln(0,4^n) < \ln(10^{-4}) \iff n \ln(0,4) < -4 \ln(10).$$

$$\iff n > \frac{-4 \ln(10)}{\ln(0,4)} \approx \frac{-9,2103}{-0,9163} \approx 10,05.$$

Le plus petit entier vérifiant cette condition est $n = 11$. On vérifie :

$$1 - 0,4^{10} \approx 0,999895 < 0,9999 \quad \text{et} \quad 1 - 0,4^{11} \approx 0,999958 > 0,9999.$$

RÉPONSE

À partir de $n = 11$ lancers, la probabilité d'en réussir au moins un dépasse 0,9999.

2.c. Complétons le script Python

MÉTHODE

La variable p contient $P(Y \geq 1) = 1 - 0,4^n$ pour le nombre courant de lancers n . On part de $n = 1$ (où $p = 0,6$) et on incrémente n tant que le seuil 0,9999 n'est pas dépassé ; on renvoie alors la valeur de n .

RÉPONSE

```
def basket () :
    p = 0.6
    n = 1
    while p <= 0.9999 :
        n = n + 1
        p = 1 - 0.4**n
    return n
```

Les pointillés sont remplacés par $p <= 0.9999$ (condition d'arrêt) et par $1 - 0.4**n$ (mise à jour de la probabilité) ; la fonction renvoie n . Cet appel donne bien `basket() = 11`.

Variante acceptable : $p = 1 - 0.4 * (1-p)$, qui exprime p_{n+1} en fonction de p_n sans réutiliser l'exposant.

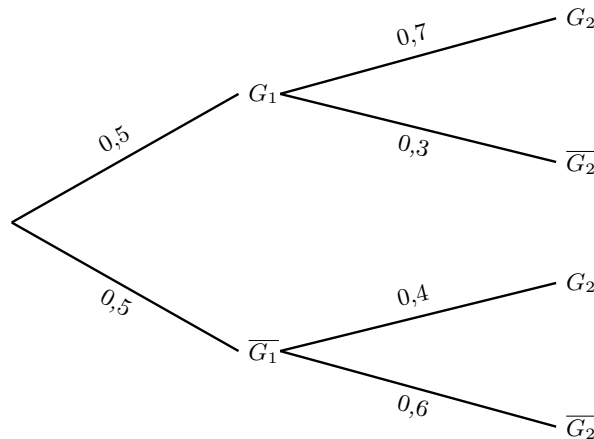
Partie B

RAPPEL

Pour un autre joueur : $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = 0,4$, avec $P(G_1) = 0,5$.

1. Calculons $P(G_2)$ **MÉTHODE**

Les événements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers : on applique la formule des probabilités totales $P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2)$.



$$P(G_2) = P(G_1) P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,4.$$

$$P(G_2) = 0,35 + 0,20 = 0,55.$$

RÉPONSE

$$P(G_2) = 0,55.$$

2.a. Montrons par récurrence que $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $p_n \leq p_{n+1}$.

Initialisation. On a $p_1 = 0,5$ et $p_2 = P(G_2) = 0,55$ (question 1). Comme $0,5 \leq 0,55$, on a $p_1 \leq p_2$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$, c'est-à-dire $p_n \leq p_{n+1}$. Puisque $0,3 > 0$, la multiplication par $0,3$ conserve l'ordre, et l'ajout de $0,4$ également :

$$p_n \leq p_{n+1} \iff 0,3 p_n \leq 0,3 p_{n+1} \iff 0,3 p_n + 0,4 \leq 0,3 p_{n+1} + 0,4.$$

Or $0,3 p_n + 0,4 = p_{n+1}$ et $0,3 p_{n+1} + 0,4 = p_{n+2}$, d'où $p_{n+1} \leq p_{n+2}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire : d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

RÉPONSE

Pour tout entier $n \geq 1$: $p_n \leq p_{n+1}$. La suite (p_n) est donc **croissante**.

2.b. Quel argument permet d'affirmer que (p_n) est majorée ?**RÉPONSE**

Pour tout entier $n \geq 1$, $p_n = P(G_n)$ est une **probabilité** : on a donc $0 \leq p_n \leq 1$. La suite (p_n) est ainsi **majorée par 1**.

2.c. Dédisons-en que la suite (p_n) est convergente

RÉPONSE

La suite (p_n) est croissante (question 2.a) et majorée par 1 (question 2.b). D'après le théorème de la convergence monotone, elle est **convergente**.

3. Interprétons la limite $\frac{4}{7}$

On remarque que $\frac{4}{7} \approx 0,571$.

RÉPONSE

Sur un très grand nombre de lancers, la probabilité que le joueur réussisse son n -ième lancer franc se stabilise autour de $\frac{4}{7} \approx 57,1\%$: à long terme, ce joueur réussit environ 4 lancers francs sur 7.

Exercice 2 — Étude de fonction

(5 pts)

1. Déterminons la limite de f en $-\infty$

MÉTHODE

On étudie séparément les deux facteurs du produit $(3x - 1)e^{-x}$: il n'y a pas de forme indéterminée en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad (\text{car } -x \rightarrow +\infty),$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^{-x} = -\infty$, puis par somme :

RÉPONSE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Déterminons la limite de f en $+\infty$ et interprétons

MÉTHODE

En $+\infty$, le produit est de la forme indéterminée $(+\infty) \times 0$. On développe et on utilise les croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Pour tout réel x : $f(x) = 3xe^{-x} - e^{-x} + 2$. Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3xe^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0,$$

donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 - 0 + 2 = 2$.

RÉPONSE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Graphiquement, la droite d'équation $y = 2$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3.a. Vérifions que $f'(x) = (4 - 3x)e^{-x}$

MÉTHODE

f est un produit uv (plus une constante), avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ en n'oubliant pas que $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables. Avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$:

$$f'(x) = 3e^{-x} + (3x - 1) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(3 - (3x - 1)) = (4 - 3x)e^{-x}.$$

RÉPONSE

Pour tout réel x : $f'(x) = (4 - 3x)e^{-x}$.

3.b. Étudions le signe de f' et dressons le tableau de variations

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: le signe de $f'(x)$ est donc celui de $4 - 3x$.

$$4 - 3x > 0 \iff x < \frac{4}{3}, \quad 4 - 3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}.$$

Ainsi f' est strictement positive sur $] -\infty ; \frac{4}{3} [$ et strictement négative sur $] \frac{4}{3} ; +\infty [$. Le maximum vaut :

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(3 \times \frac{4}{3} - 1\right) e^{-4/3} + 2 = 3e^{-4/3} + 2 \approx 2,79.$$

RÉPONSE

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$4 - 3x$	+	0	-
e^{-x}	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$3e^{-4/3} + 2$	2

f est **strictement croissante** sur $] -\infty ; \frac{4}{3} [$ et **strictement décroissante** sur $] \frac{4}{3} ; +\infty [$; elle admet un maximum égal à $3e^{-4/3} + 2 \approx 2,79$ atteint en $x = \frac{4}{3}$.

4.a. Démontrons que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

MÉTHODE

On applique le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) sur chacun des deux intervalles de monotonie de f .

• **Sur $] -\infty ; \frac{4}{3} [$:** f est continue (car dérivable) et *strictement croissante*, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $f(\frac{4}{3}) = 3e^{-4/3} + 2 \approx 2,79 > 0$. Comme 0 est compris entre ces deux valeurs, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α sur cet intervalle.

• **Sur $] \frac{4}{3} ; +\infty [$:** f est strictement décroissante et tend vers 2 en $+\infty$. Elle prend donc toutes ses valeurs dans $] 2 ; 3e^{-4/3} + 2 [$, qui ne contient pas 0. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur cet intervalle.

RÉPONSE

L'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α sur $\mathbb{R}$, et $\alpha \in] -\infty ; \frac{4}{3} [$.

4.b. Donnons une valeur approchée de α à 10^{-2} près

Par balayage à la calculatrice :

$$f(-0,21) \approx -0,011 < 0 \quad \text{et} \quad f(-0,20) \approx 0,046 > 0,$$

donc $-0,21 < \alpha < -0,20$. Plus précisément, $\alpha \approx -0,2081$.

RÉPONSE

$\alpha \approx -0,21$ (à 10^{-2} près).

4.c. Déduisons-en le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$

Sur $] -\infty ; \frac{4}{3} [$, f est strictement croissante et s'annule en α : elle est donc négative avant α et positive après. Sur $] \frac{4}{3} ; +\infty [$, f reste supérieure à 2, donc strictement positive.

RÉPONSE

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$f(x) < 0$ sur $] -\infty ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$, avec $\alpha \approx -0,21$.

4.d. Calculons l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$

MÉTHODE

Si f est **positive** sur $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f .

D'après le tableau de signes, f est positive sur $[0 ; 2]$ puisque $\alpha \approx -0,21 < 0$. L'aire cherchée vaut donc $\int_0^2 f(x) dx$. Avec $F(x) = (-3x - 2)e^{-x} + 2x$:

$$F(2) = (-6 - 2)e^{-2} + 4 = -8e^{-2} + 4, \quad F(0) = (-0 - 2)e^0 + 0 = -2.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = (-8e^{-2} + 4) - (-2) = 6 - 8e^{-2}.$$

RÉPONSE

L'aire du domaine vaut $\mathcal{A} = 6 - 8e^{-2} \approx 4,92$ unités d'aire.

5. Vérifions que $(3x - 1)e^{-x} + 2 \leq 4x + 1$ pour tout réel x

MÉTHODE

L'inégalité demandée signifie que $\mathcal{C}_f$ est *en dessous* de sa tangente en 0. On étudie donc la fonction écart $g = (4x + 1) - f$ et on montre que son minimum vaut 0. Comme f n'est pas concave sur $\mathbb{R}$, on doit passer par la dérivée seconde.

Posons, pour tout réel x : $g(x) = (4x + 1) - f(x) = 4x - 1 - (3x - 1)e^{-x}$.

Dérivées. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après la question 3.a :

$$g'(x) = 4 - f'(x) = 4 - (4 - 3x)e^{-x}, \quad g''(x) = -f''(x) = (7 - 3x)e^{-x},$$

car $f''(x) = [(4 - 3x)e^{-x}]' = -3e^{-x} - (4 - 3x)e^{-x} = (3x - 7)e^{-x}$.

Variations de g' . Comme $e^{-x} > 0$, $g''(x)$ est du signe de $7 - 3x$: g' est strictement croissante sur $] -\infty ; \frac{7}{3}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{7}{3} ; +\infty[$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty, \quad g'\left(\frac{7}{3}\right) = 4 + 3e^{-7/3} \approx 4,29, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 4.$$

Signe de g' . On calcule $g'(0) = 4 - 4 \times e^0 = 0$. Sur $] -\infty ; \frac{7}{3}]$, g' est strictement croissante et s'annule donc *uniquement* en 0 : $g'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $g'(x) > 0$ sur $] 0 ; \frac{7}{3}]$. Sur $[\frac{7}{3} ; +\infty[$, g' décroît de $4 + 3e^{-7/3}$ vers 4 : elle y reste supérieure à 4, donc strictement positive.

Conclusion. g est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un minimum en 0, et

$$g(0) = 4 \times 0 - 1 - (0 - 1) \times e^0 = -1 + 1 = 0.$$

RÉPONSE

Pour tout réel x , $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire

$$(3x - 1)e^{-x} + 2 \leq 4x + 1.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située **en dessous** de sa tangente au point d'abscisse 0, qu'elle touche en ce seul point.

Exercice 3 — Vrai ou Faux

(5 pts)

Affirmation 1. La fonction $f(x) = (x - 2)e^x$ est solution de $(E): y' - 2y = (x - 3)e^x$.

MÉTHODE

Il suffit de calculer $f'(x) - 2f(x)$ et de le comparer au second membre $(x - 3)e^x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + (x - 2)e^x = (x - 1)e^x$. Alors :

$$f'(x) - 2f(x) = (x - 1)e^x - 2(x - 2)e^x = e^x(x - 1 - 2x + 4) = (3 - x)e^x.$$

Or $(3 - x)e^x = -(x - 3)e^x$: on obtient l'*opposé* du second membre attendu.

RÉPONSE

Affirmation 1 **FAUSSE** : $f'(x) - 2f(x) = (3 - x)e^x \neq (x - 3)e^x$ (sauf pour $x = 3$). La fonction f n'est donc pas solution de (E) .

Remarque : c'est la fonction $x \mapsto (2 - x)e^x$ qui est solution de (E) .

Affirmation 2. $\int_0^\pi (2x + 1) \cos(x) \, dx = -4\pi.$

MÉTHODE

Intégration par parties : $\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$. On pose $u(x) = 2x + 1$ (que l'on dérive) et $v'(x) = \cos(x)$ (que l'on intègre).

Les fonctions $u: x \mapsto 2x + 1$ et $v: x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables, de dérivées continues sur $[0; \pi]$, avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (2x + 1) \cos(x) \, dx = \left[(2x + 1) \sin(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin(x) \, dx.$$

Comme $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$, le crochet est nul :

$$\left[(2x + 1) \sin(x) \right]_0^\pi = (2\pi + 1) \times 0 - 1 \times 0 = 0.$$

$$\int_0^\pi 2 \sin(x) \, dx = \left[-2 \cos(x) \right]_0^\pi = -2 \cos(\pi) + 2 \cos(0) = 2 + 2 = 4.$$

D'où $\int_0^\pi (2x + 1) \cos(x) \, dx = 0 - 4 = -4.$

RÉPONSE

Affirmation 2 **FAUSSE** : l'intégrale vaut -4 et non -4π .

Affirmation 3. Sur $]7; +\infty[$, l'ensemble des solutions de $\ln(2x^2 - 6x - 56) \geq \ln(4x - 8)$ est $]8; +\infty[$.

MÉTHODE

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$: pour $A > 0$ et $B > 0$, $\ln A \geq \ln B \iff A \geq B$. Il faut d'abord vérifier que les deux expressions sont bien strictement positives sur l'intervalle d'étude.

Conditions d'existence. Pour $x > 7$: $4x - 8 > 20 > 0$, et $2x^2 - 6x - 56 = 2(x - 7)(x + 4) > 0$ car $x - 7 > 0$ et $x + 4 > 0$. Les deux logarithmes sont donc bien définis sur $]7 ; +\infty[$.

Résolution. Par stricte croissance de $\ln$:

$$\begin{aligned}\ln(2x^2 - 6x - 56) &\geq \ln(4x - 8) \iff 2x^2 - 6x - 56 \geq 4x - 8 \\ \iff 2x^2 - 10x - 48 &\geq 0 \iff x^2 - 5x - 24 \geq 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 24$ vaut $\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2 > 0$, d'où les racines :

$$x_1 = \frac{5 - 11}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + 11}{2} = 8.$$

Le coefficient dominant étant positif, $x^2 - 5x - 24 \geq 0$ sur $] -\infty ; -3] \cup [8 ; +\infty[$. En intersectant avec $]7 ; +\infty[$, l'ensemble des solutions est $[8 ; +\infty[$.

Le cas $x = 8$. $2 \times 64 - 48 - 56 = 24$ et $4 \times 8 - 8 = 24$: on a $\ln(24) \geq \ln(24)$, l'inégalité (large) est vérifiée. Donc 8 **est** solution.

RÉPONSE

Affirmation 3 **FAUSSE** : l'ensemble des solutions est l'intervalle **fermé** $[8 ; +\infty[$, et non $]8 ; +\infty[$, car $x = 8$ vérifie l'inéquation (l'inégalité est large).

Affirmation 4. La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{2}{u_n}$ est arithmétique, où $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{5u_n + 3}$.

MÉTHODE

Une suite est arithmétique si la différence $v_{n+1} - v_n$ est **constante**. On exprime v_{n+1} en fonction de u_n puis de v_n .

Pour tout entier naturel n , $u_n \neq 0$, donc :

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{2}{\frac{3u_n}{5u_n + 3}} = \frac{2(5u_n + 3)}{3u_n} = \frac{10u_n}{3u_n} + \frac{6}{3u_n} = \frac{10}{3} + \frac{2}{u_n}.$$

On reconnaît $\frac{2}{u_n} = v_n$, d'où $v_{n+1} = v_n + \frac{10}{3}$.

RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : $v_{n+1} - v_n = \frac{10}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est **arithmétique** de raison $\frac{10}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{u_0} = 2$.

Affirmation 5. On lance 3 600 fois un dé équilibré. La probabilité que le nombre d'apparitions du 6 soit strictement compris entre 450 et 750 est minorée par 0,97.

MÉTHODE

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $a > 0$, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$. On commence par écrire l'intervalle $]450 ; 750[$ sous la forme $]E(X) - a ; E(X) + a[$.

Notons X le nombre d'apparitions du 6. Les 3 600 lancers sont identiques et indépendants, avec une probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$: X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,600; \frac{1}{6})$, donc :

$$E(X) = np = 3\,600 \times \frac{1}{6} = 600, \quad V(X) = np(1-p) = 3\,600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 500.$$

L'intervalle $]450 ; 750[$ s'écrit $]600 - 150 ; 600 + 150[$: il est centré en $E(X) = 600$ et de rayon $a = 150$. Ainsi :

$$P(450 < X < 750) = P(|X - 600| < 150) = 1 - P(|X - 600| \geq 150).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $a = 150$ donne :

$$P(|X - 600| \geq 150) \leq \frac{V(X)}{150^2} = \frac{500}{22\,500} = \frac{1}{45} \approx 0,0222.$$

Par conséquent :

$$P(450 < X < 750) \geq 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \approx 0,9778.$$

RÉPONSE

Affirmation 5 **VRAIE** : $P(450 < X < 750) \geq \frac{44}{45} \approx 0,978 > 0,97$.

Exercice 4 — Géométrie dans l'espace

(5 pts)

RAPPEL

Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, et

$$R(1; 0; 6), \quad S(1; 3; 2), \quad T(3,5; 7; 5), \quad A(-2,5; 8; 4,5).$$

Partie A

1. Démontrons que R, S et T ne sont pas alignés

MÉTHODE

Trois points sont alignés si et seulement si deux vecteurs formés à partir de ces points sont colinéaires. Il suffit donc de montrer que $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne le sont pas.

$$\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3-0 \\ 2-6 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 3,5-1 \\ 7-0 \\ 5-6 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{RT} = k \overrightarrow{RS}$. La première coordonnée donnerait $2,5 = k \times 0 = 0$, ce qui est impossible.

RÉPONSE

Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires : les points R, S et T ne sont **pas alignés** et définissent donc bien un plan (RST) .

2.a. Démontrons que $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (RST)

MÉTHODE

Un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs *non colinéaires* de ce plan : on vérifie la nullité de deux produits scalaires.

D'après la question 1, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (RST) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{RS} = (-10) \times 0 + 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0 + 12 - 12 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{RT} = (-10) \times 2,5 + 4 \times 7 + 3 \times (-1) = -25 + 28 - 3 = 0.$$

RÉPONSE

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (RST) : c'est donc un **vecteur normal** au plan (RST) .

2.b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (RST)

Le plan (RST) admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$: il admet donc une équation cartésienne de la forme

$$-10x + 4y + 3z + d = 0.$$

Le point $R(1 ; 0 ; 6)$ appartient à ce plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$-10 \times 1 + 4 \times 0 + 3 \times 6 + d = 0 \iff -10 + 18 + d = 0 \iff d = -8.$$

Vérification. Pour $S(1 ; 3 ; 2)$: $-10 + 12 + 6 - 8 = 0 \checkmark$; pour $T(3,5 ; 7 ; 5)$: $-35 + 28 + 15 - 8 = 0 \checkmark$.

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (RST) est $-10x + 4y + 3z - 8 = 0$.

3.a. Vérifions que A n'appartient pas au plan (RST)

On remplace les coordonnées de $A(-2,5 ; 8 ; 4,5)$ dans le membre de gauche :

$$-10 \times (-2,5) + 4 \times 8 + 3 \times 4,5 - 8 = 25 + 32 + 13,5 - 8 = 62,5.$$

RÉPONSE

$62,5 \neq 0$: les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation du plan, donc $A \notin (RST)$.

3.b. Déterminons une représentation paramétrique de d_1

La droite d_1 est orthogonale au plan (RST) : elle est donc dirigée par un vecteur normal de ce plan, par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, et elle passe par $A(-2,5 ; 8 ; 4,5)$.

RÉPONSE

$$d_1 : \begin{cases} x = -2,5 - 10t \\ y = 8 + 4t \\ z = 4,5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.c. Vérifions que le projeté orthogonal H de A sur (RST) a pour coordonnées $(2,5 ; 6 ; 3)$

MÉTHODE

Le projeté orthogonal H est le point d'intersection de la droite d_1 et du plan (RST) : on reporte la représentation paramétrique de d_1 dans l'équation cartésienne du plan pour déterminer le paramètre t .

Un point de d_1 a pour coordonnées $(-2,5 - 10t ; 8 + 4t ; 4,5 + 3t)$. Il appartient au plan (RST) si et seulement si :

$$-10(-2,5 - 10t) + 4(8 + 4t) + 3(4,5 + 3t) - 8 = 0.$$

$$\iff 25 + 100t + 32 + 16t + 13,5 + 9t - 8 = 0 \iff 62,5 + 125t = 0 \iff t = -0,5.$$

On reporte $t = -0,5$ dans la représentation paramétrique :

$$x = -2,5 - 10 \times (-0,5) = 2,5, \quad y = 8 + 4 \times (-0,5) = 6, \quad z = 4,5 + 3 \times (-0,5) = 3.$$

RÉPONSE

Le projeté orthogonal de A sur le plan (RST) est bien $H(2,5 ; 6 ; 3)$.

4.a. Démontrons que le triangle RST est rectangle en S

MÉTHODE

Le triangle est rectangle en S si et seulement si $\overrightarrow{SR} \cdot \overrightarrow{ST} = 0$.

$$\overrightarrow{SR} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{ST} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{SR} \cdot \overrightarrow{ST} = 0 \times 2,5 + (-3) \times 4 + 4 \times 3 = 0 - 12 + 12 = 0.$$

RÉPONSE

$\overrightarrow{SR} \cdot \overrightarrow{ST} = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont orthogonaux, donc le triangle RST est **rectangle en S** .

4.b. Vérifions que le volume du tétraèdre $ARST$ vaut $\frac{625}{24} \text{ cm}^3$

MÉTHODE

On prend pour base le triangle RST , rectangle en S : son aire vaut $\frac{1}{2} \times SR \times ST$. La hauteur associée est la distance de A au plan (RST) , c'est-à-dire AH , où H est le projeté orthogonal de A (question 3.c).

Aire de la base.

$$SR = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \quad ST = \sqrt{2,5^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{31,25} = \frac{5\sqrt{5}}{2},$$

$$\mathcal{A}_{RST} = \frac{1}{2} \times SR \times ST = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

Hauteur. Avec $A(-2,5 ; 8 ; 4,5)$ et $H(2,5 ; 6 ; 3)$:

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \quad AH = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{31,25} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Volume.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{RST} \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{4} \times \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{125 \times 5}{8} = \frac{625}{24}.$$

RÉPONSE

Le volume du tétraèdre $ARST$ est $\mathcal{V} = \frac{625}{24} \approx 26,04 \text{ cm}^3$.

Partie B**RAPPEL**

$M(x ; y ; z)$ est un point de la droite d_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4,5 + s \\ y = 4 - 4s \\ z = 5,5 - 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

et $A(-2,5 ; 8 ; 4,5)$.

1. Démontrons que $AM^2 = 21s^2 + 24s + 21$

MÉTHODE

On calcule les coordonnées $(a ; b ; c)$ du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de s , puis on applique $AM^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (le repère est orthonormé).

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} (-4,5 + s) - (-2,5) \\ (4 - 4s) - 8 \\ (5,5 - 2s) - 4,5 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} s - 2 \\ -4s - 4 \\ 1 - 2s \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$AM^2 = (s - 2)^2 + (-4s - 4)^2 + (1 - 2s)^2.$$

$$AM^2 = (s^2 - 4s + 4) + (16s^2 + 32s + 16) + (4s^2 - 4s + 1).$$

$$AM^2 = (1 + 16 + 4)s^2 + (-4 + 32 - 4)s + (4 + 16 + 1) = 21s^2 + 24s + 21.$$

RÉPONSE

Pour tout réel s : $AM^2 = 21s^2 + 24s + 21$.

2. Déterminons les coordonnées de M pour lesquelles AM est minimale**MÉTHODE**

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, la distance AM est minimale exactement lorsque AM^2 l'est. Or $s \mapsto 21s^2 + 24s + 21$ est un trinôme du second degré de coefficient dominant $a = 21 > 0$: il atteint son minimum en $s = -\frac{b}{2a}$.

Avec $a = 21$ et $b = 24$:

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2 \times 21} = -\frac{24}{42} = -\frac{4}{7}.$$

On reporte cette valeur dans la représentation paramétrique de d_2 :

$$x = -\frac{9}{2} - \frac{4}{7} = \frac{-63 - 8}{14} = -\frac{71}{14},$$

$$y = 4 - 4 \times \left(-\frac{4}{7}\right) = 4 + \frac{16}{7} = \frac{28 + 16}{7} = \frac{44}{7},$$

$$z = \frac{11}{2} - 2 \times \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{11}{2} + \frac{8}{7} = \frac{77 + 16}{14} = \frac{93}{14}.$$

La distance minimale vaut alors :

$$AM^2 = 21 \times \frac{16}{49} + 24 \times \left(-\frac{4}{7}\right) + 21 = \frac{48}{7} - \frac{96}{7} + \frac{147}{7} = \frac{99}{7}, \quad AM = \sqrt{\frac{99}{7}} = \frac{3\sqrt{77}}{7} \approx 3,76.$$

RÉPONSE

La distance AM est minimale pour $s = -\frac{4}{7}$, c'est-à-dire pour le point

$$M \left(-\frac{71}{14} ; \frac{44}{7} ; \frac{93}{14} \right) \approx M(-5,07 ; 6,29 ; 6,64).$$

Cette distance minimale vaut $AM = \frac{3\sqrt{77}}{7} \approx 3,76$ cm ; M est alors le projeté orthogonal de A sur la droite d_2 .