

# Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques  
Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2 — Sujet 26-MATJ2ME1  
Métropole — Mercredi 17 juin 2026

## Exercice 1 — Géométrie dans l'espace

(5 pts)

**RAPPEL**
 $A(2; 1; 1), B(3; -2; 0), C(0; -1; 1), D(0; 0; 2).$ 

### 1. Les points $A, B, C$ définissent un plan

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (de  $1 = -2k$  on tire  $k = -\frac{1}{2}$ , mais alors  $-3 \neq -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$ ).

**RÉPONSE**

$\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires :  $A, B, C$  ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

### 2.a. $\vec{n}$ est normal à $(ABC)$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AB} &= 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0. \end{aligned}$$

**RÉPONSE**

$\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $(ABC)$  : c'est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

### 2.b. Équation cartésienne de $(ABC)$

Le plan a une équation de la forme  $x - y + 4z + d = 0$ . En écrivant que  $A(2; 1; 1)$  appartient au plan :

$$2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5.$$

**RÉPONSE**

Une équation cartésienne de  $(ABC)$  est  $x - y + 4z - 5 = 0$ .

### 3. Représentation paramétrique de $\Delta$

$\Delta$  passe par  $D(0; 0; 2)$  et est orthogonale à  $(ABC)$  : elle admet  $\vec{n}$  comme vecteur directeur. Une représentation est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t = t \\ y = 0 - 1 \times t = -t \\ z = 2 + 4 \times t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ce qui est bien la représentation proposée.

**RÉPONSE**

La représentation paramétrique donnée convient (point  $D$ , vecteur directeur  $\vec{n}$ ).

**4. Projeté orthogonal  $H$  de  $D$  sur  $(ABC)$** 

$H$  est l'intersection de  $\Delta$  avec  $(ABC)$ . Un point de  $\Delta$  s'écrit  $(t; -t; 2 + 4t)$  ; il appartient au plan lorsque :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \iff 18t + 3 = 0 \iff t = -\frac{1}{6}.$$

On obtient  $x = -\frac{1}{6}$ ,  $y = \frac{1}{6}$ ,  $z = 2 + 4 \times (-\frac{1}{6}) = \frac{4}{3}$ .

**RÉPONSE**

Le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$  est  $H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$ .

**5.a. Triangle  $ABC$  isocèle en  $B$** 

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}, \quad BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$$

**RÉPONSE**

$BA = BC = \sqrt{11}$  : le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .

**5.b. Aire du triangle  $ABC$** **MÉTHODE**

$ABC$  étant isocèle en  $B$ , la médiane issue de  $B$  est aussi la hauteur. On note  $M$  le milieu de  $[AC]$  ; l'aire vaut  $\frac{1}{2} \times AC \times BM$ .

$M$  milieu de  $[AC]$  :  $M(1; 0; 1)$ . Alors :

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \vec{BM} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad BM = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

On vérifie  $\vec{BM} \cdot \vec{AC} = (-2)(-2) + 2 \times (-2) + 1 \times 0 = 0$  (la médiane est bien la hauteur). D'où :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}.$$

**RÉPONSE**

L'aire du triangle  $ABC$  est  $3\sqrt{2}$ .

**6.a. Volume du tétraèdre  $ABCD$** 

La hauteur relative à la base  $ABC$  est  $DH$ , avec  $D\vec{H} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  :

$$DH = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{2}{2} = 1.$$

**RÉPONSE**

Le volume du tétraèdre  $ABCD$  est  $V = 1$ .

**6.b. Aire du triangle  $BCD$** 

En prenant pour base le triangle  $BCD$  et pour hauteur la distance de  $A$  au plan  $(BCD)$ , égale à  $\sqrt{2}$  :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2} = 1 \iff \mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

**RÉPONSE**

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12.$$

**7.a. Valeur de  $k$  pour  $A, B, C, D_k$  coplanaires**

$D_k(0; 0; k)$  appartient au plan  $(ABC)$  lorsque :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \iff k = \frac{5}{4}.$$

**RÉPONSE**

Pour  $k = \frac{5}{4}$ , les points sont coplanaires.  $D_k$  appartenant alors au plan  $(ABC)$ , son projeté orthogonal sur ce plan est **lui-même**, le point  $D_k\left(0; 0; \frac{5}{4}\right)$ .

**7.b.  $A$  peut-il être le projeté orthogonal de  $D_k$  ?**

Pour que  $A$  (qui appartient au plan) soit le projeté orthogonal de  $D_k$ , il faudrait que  $\overrightarrow{D_k A}$  soit normal au plan, donc colinéaire à  $\vec{n}$ . Or  $D_k \vec{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1-k \end{pmatrix}$  : une colinéarité  $\overrightarrow{D_k A} = \lambda \vec{n}$  imposerait  $\lambda = 2$  (première coordonnée) et simultanément  $1 = -\lambda = -2$  (deuxième coordonnée), ce qui est impossible.

**RÉPONSE**

**Non** : aucune valeur de  $k$  ne convient, car  $\overrightarrow{D_k A}$  ne peut être colinéaire à  $\vec{n}$ .

## Exercice 2 — Pollution d'un bassin

(5 pts)

## Partie A — Modèle discret

## RAPPEL

 $V_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$ .
1. Calcul de  $V_1$  et  $V_2$ 

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6, \quad V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 11,97.$$

## RÉPONSE

 $V_1 = 6$  et  $V_2 = 11,97$  (litres).

## 2. Programme Python complété

## RÉPONSE

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995*v + 6
    return v
```

3. Récurrence :  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ 
*Initialisation.*  $V_0 = 0$  et  $V_1 = 6$  : on a bien  $0 \leq 6 \leq 1200$ .

*Hérédité.* Supposons  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ . La fonction  $x \mapsto 0,995x + 6$  étant croissante :

$$0,995 V_n + 6 \leq 0,995 V_{n+1} + 6 \leq 0,995 \times 1200 + 6,$$

soit  $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$ .

## RÉPONSE

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ .

## 4. Convergence et limite

## RÉPONSE

La suite  $(V_n)$  est croissante et majorée par 1200 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge**. Sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = 0,995 \ell + 6$ , soit  $0,005 \ell = 6$ , d'où  $\ell = 1200$  litres.

## Partie B — Modèle continu

## RAPPEL

 $v(0) = 0$  ;  $v$  est solution de  $(E)$  :  $y' = -0,005 y + 6$  sur  $[0; +\infty[$ .
1.a. Solutions de  $(E)$ 

Les solutions de  $y' = ay + b$  (avec  $a \neq 0$ ) sont  $t \mapsto C e^{at} - \frac{b}{a}$ . Ici  $a = -0,005$ ,  $b = 6$ ,  $-\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1200$ .

## RÉPONSE

Les solutions sont  $y(t) = C e^{-0,005t} + 1200$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

**1.b. Expression de  $v(t)$** 

$v(0) = 0$  donne  $C + 1200 = 0 \iff C = -1200$ . Donc  $v(t) = -1200 e^{-0,005t} + 1200$ .

**RÉPONSE**

Pour tout  $t \geq 0$ ,  $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$ .

**1.c. Limite de  $v$  en  $+\infty$** 

Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-0,005t} \rightarrow 0$ , donc  $v(t) \rightarrow 1200$ .

**RÉPONSE**

$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200$  litres.

**1.d. Sens de variation de  $v$** 

$v'(t) = -1200 \times (-0,005) e^{-0,005t} = 6 e^{-0,005t} > 0$ .

**RÉPONSE**

$v$  est **strictement croissante** sur  $[0; +\infty[$ .

**2. Nettoyage complet nécessaire ?**

5 % du volume du bassin représentent  $0,05 \times 30\,000 = 1500$  L. Or  $v$  est croissante et tend vers 1200 : pour tout  $t$ ,  $v(t) < 1200 < 1500$ .

**RÉPONSE**

Le volume de polluant ne dépasse jamais 1500 L : selon ce modèle, le propriétaire **n'aura pas** à procéder au nettoyage complet.

**3. Instant où le volume dépasse 50 L**

$$1200(1 - e^{-0,005t}) = 50 \iff 1 - e^{-0,005t} = \frac{1}{24} \iff e^{-0,005t} = \frac{23}{24}$$

$$\iff -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{24}{23}\right)}{0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right)$$

Numériquement,  $t \approx 8,51$  h, soit 8 h et  $0,51 \times 60 \approx 31$  min.

**RÉPONSE**

Valeur exacte :  $t = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right)$  h, soit environ **8 h 31 min**.

## Exercice 3 — Vrai/Faux (probabilités)

(4 pts)

### Affirmation 1

Données :  $P(O) = 0,52$ ,  $P_O(F) = 0,32$ ,  $P(F) = 0,20$ . Donc :

$$P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664,$$

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832.$$

#### RÉPONSE

Affirmation 1 **VRAIE** :  $P_F(O) = 0,832$ .

### Affirmation 2

$X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(5000; 0,062)$ , d'espérance  $E(X) = np = 5000 \times 0,062 = 310$ . Comme  $340 > 310 = E(X)$ , on a nécessairement  $P(X \leq 340) > 0,5$ . À la calculatrice,  $P(X \leq 340) \approx 0,96$ .

#### RÉPONSE

Affirmation 2 **FAUSSE** :  $P(X \leq 340) \approx 0,96$ , et non 0,4.

### Affirmation 3

$E(X) = 310$  et  $V(X) = np(1-p) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 \approx 290,8$ . L'encadrement strict  $230 < X < 390$  s'écrit  $|X - 310| < 80$ . L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev avec  $a = 80$  donne :

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{V(X)}{80^2} = \frac{290,8}{6400} \approx 0,045,$$

d'où  $P(230 < X < 390) = P(|X - 310| < 80) \geq 1 - 0,045 = 0,955 > 0,95$ .

#### RÉPONSE

Affirmation 3 **VRAIE** : la probabilité est supérieure à 0,95 ( $\geq 0,955$ ).

### Affirmation 4

Une équipe est constituée de 2 musiciens choisis parmi 4 et de 3 non-musiciens choisis parmi 6 :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120.$$

#### RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : on peut former 120 équipes différentes.

## Exercice 4 — Fonction exponentielle et logo

(6 pts)

## Partie A — Lectures graphiques

1.a. Valeur de  $f'(1)$ 

## RÉPONSE

Au point  $C$  d'abscisse 1, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses :  $f'(1) = 0$ .

1.b. Solution de  $f(x) = 0$  sur  $[0; 3]$ 

## RÉPONSE

La courbe coupe l'axe des abscisses au seul point  $A(\frac{1}{2}; 0)$  : la solution est  $x = \frac{1}{2}$ .

2. Valeur de  $f'(\frac{1}{2})$ 

$f'(\frac{1}{2})$  est le coefficient directeur de  $T_A$ , qui passe par  $A(\frac{1}{2}; 0)$  et  $B(1; e^2)$  :

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

## RÉPONSE

$$f'(\frac{1}{2}) = 2e^2.$$

3. Courbes représentant des primitives de  $f$ 

## MÉTHODE

Une primitive  $F$  vérifie  $F' = f$ . Son sens de variation est donné par le signe de  $f$  ; de plus deux primitives diffèrent d'une constante (elles se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale).

Sur  $[0; \frac{1}{2}[$ ,  $f < 0$  et sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ ,  $f > 0$ . Une primitive est donc **décroissante puis croissante**, avec un **minimum en**  $x = \frac{1}{2}$ .

## RÉPONSE

Les primitives de  $f$  sont les courbes  $C_2$  et  $C_3$  : elles présentent un minimum en  $x = \frac{1}{2}$  (décroissantes là où  $f < 0$ , croissantes là où  $f > 0$ ) et se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale (différence d'une constante).  $C_1$  est exclue (son minimum n'est pas en  $x = \frac{1}{2}$ ).

Partie B — Étude de  $f$ 

## RAPPEL

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

## 1.a. Forme proposée

$$e^{-2x+3} = e^2 \times e^{-(2x-1)} = e^2 \times \frac{1}{e^{2x-1}},$$

$$\text{donc } f(x) = (2x - 1) \times e^2 \times \frac{1}{e^{2x-1}} = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

## RÉPONSE

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}}$ .

1.b. Limite de  $f$  en  $+\infty$ 

On pose  $X = 2x - 1$  ; quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow +\infty$  et  $f(x) = e^2 \times \frac{X}{e^X}$ . Par croissances comparées,  $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$ .

## RÉPONSE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2.a. Expression de  $f'(x)$ 

$f$  est un produit ( $u = 2x - 1$ ,  $v = e^{-2x+3}$ ,  $u' = 2$ ,  $v' = -2e^{-2x+3}$ ) :

$$f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x-1)(-2)e^{-2x+3} = e^{-2x+3}[2 - 2(2x-1)] = (-4x+4)e^{-2x+3}.$$

## RÉPONSE

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$ .

## 2.b. Tableau de variations

$e^{-2x+3} > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-4x+4 = 4(1-x)$  : positif pour  $x < 1$ , négatif pour  $x > 1$ . De plus  $f(0) = -e^3$ ,  $f(1) = e$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f$	$-e^3$	$e$	0

Le tableau de variations est complété par des signes de  $f'(x)$  (+ avant 1, - après 1) et des flèches indiquant l'augmentation de  $f$  de  $-e^3$  à  $e$  et la diminution de  $f$  de  $e$  à  $0$ .

## RÉPONSE

$f$  est croissante sur  $[0; 1]$  (de  $-e^3$  à  $e$ ) puis décroissante sur  $[1; +\infty[$  (de  $e$  vers  $0$ ).

3. Contrainte du client et détermination de  $\alpha$ 

## MÉTHODE

À l'abscisse  $\alpha$ , le logo est délimité par  $\mathcal{C}_f$  et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses : sa hauteur vaut  $f(\alpha) - (-f(\alpha)) = 2f(\alpha)$ .

La contrainte 0,3 cm impose  $2f(\alpha) = 0,3$ , soit  $f(\alpha) = 0,15$ .

Sur  $[1; +\infty[$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante de  $f(1) = e \approx 2,72$  vers  $0$ . Comme  $0,15 \in ]0; e[$ , le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à une fonction strictement monotone) garantit l'existence d'un unique  $\alpha \in [1; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 0,15$ . À la calculatrice,  $f(3,3) \approx 0,153$  et  $f(3,4) \approx 0,130$ .

## RÉPONSE

$f(\alpha) = 0,15$  admet une unique solution sur  $[1; +\infty[$  :  $\alpha \approx 3,3$ .

**Partie C — Volume du porte-clé**

1. Calcul de  $I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx$

**MÉTHODE**

Intégration par parties avec  $u = 2x - 1$  et  $v' = e^{-2x+3}$ , donc  $u' = 2$  et  $v = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$ .

$$I = \left[ -\frac{2x-1}{2} e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} 2 \times \left( -\frac{1}{2} e^{-2x+3} \right) dx.$$

Or  $\int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3}$ , d'où, en regroupant, une primitive de  $f$  est  $F(x) = -x e^{-2x+3}$  (on vérifie  $F'(x) = (2x-1)e^{-2x+3} = f(x)$ ). Ainsi :

$$I = \left[ -x e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -3,3 e^{-3,6} + 0,5 e^2 \approx -0,090 + 3,695 \approx 3,6.$$

**RÉPONSE**

$$I \approx 3,6.$$

**2. Volume du porte-clé**

L'aire du logo est comprise entre  $\mathcal{C}_f$  et son symétrique sur  $[0,5; 3,3]$ , soit :

$$\mathcal{A}_{\text{logo}} = \int_{0,5}^{3,3} [f(x) - (-f(x))] dx = 2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2.$$

Le volume vaut alors :

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{logo}} \times e = 7,2 \times 0,2 = 1,44 \text{ cm}^3.$$

**RÉPONSE**

$$\mathcal{V} \approx 1,4 \text{ cm}^3.$$