Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Métropole — Jour 1

Sujet 26-MATJ1ME1 — 16 juin 2026

Exercice 1 — Probabilités

(5 pts)

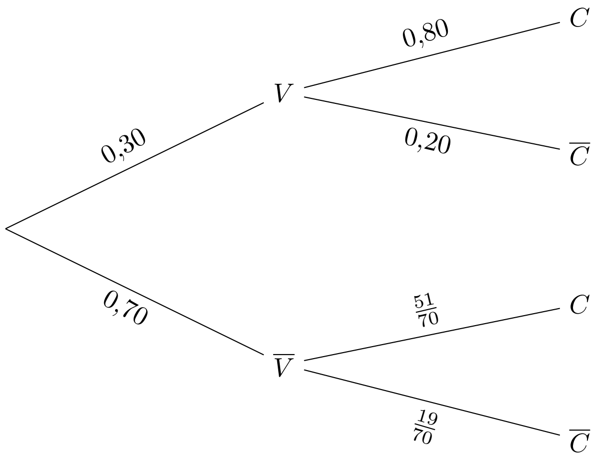
Partie A

RAPPEL

$P(V) = 0{,}30$ (emplacement véhicule), $P_V(C) = 0{,}80$ (cabine sachant véhicule), et $P(C) = 0{,}75$ (cabine).

1.a. D'après l'énoncé, $P(C) = 0{,}75$.

1.b. Arbre pondéré complété



RÉPONSE

Pointillés : $P(\overline{V}) = 0{,}70$ et $P_V(\overline{C}) = 0{,}20$ (compléments à 1) ; les branches issues de $\overline{V}$, $P_{\overline{V}}(C) = \frac{51}{70} \approx 0{,}73$ et $P_{\overline{V}}(\overline{C}) = \frac{19}{70} \approx 0{,}27$, sont justifiées à la question 4.

2. Probabilité $P(V \cap C)$

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0{,}30 \times 0{,}80 = 0{,}24.$$

RÉPONSE

$P(V \cap C) = 0{,}24$.

3. Probabilité $P_C(V)$

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}24}{0{,}75} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25} = 0{,}32.$$

RÉPONSE

$P_C(V) = 0{,}32$.

4. Calcul de $P_{\overline{V}}(C)$ et interprétation

MÉTHODE

V et $\overline{V}$ forment une partition : $P(C) = P(V \cap C) + P(\overline{V} \cap C)$, d'où l'on tire $P(\overline{V} \cap C)$ puis la probabilité conditionnelle.

$$P(\overline{V} \cap C) = P(C) - P(V \cap C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51,$$

$$P_{\overline{V}}(C) = \frac{P(\overline{V} \cap C)}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}51}{0{,}70} = \frac{51}{70} \approx 0{,}73.$$

RÉPONSE

$P_{\overline{V}}(C) \approx 0{,}73$: parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ $73\,\%$ réservent tout de même une cabine.

Partie B

RAPPEL

Loi de X (prix des suppléments) : $x_i \in \{0\,;70\,;100\,;170\}$ avec $P = \{0{,}19\,;0{,}06\,;0{,}51\,;0{,}24\}$. De plus $E(Y) = 104$, $V(Y) = 1686$, et X, Y sont indépendantes.

1. Justifier $E(X) = 96$ et $V(X) = 3114$

$$E(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24 = 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = 96.$$

Pour la variance, on calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24 = 294 + 5100 + 6936 = 12\,330,$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114.$$

RÉPONSE

$E(X) = 96$ et $V(X) = 3\,114$.

2.a. Justifier $Z = 0{,}6(X + Y)$

Le total avant remise est $X + Y$. Une remise de $40\,\%$ revient à ne payer que $100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$ du total :

$$Z = (1 - 0{,}40)(X + Y) = 0{,}6\,(X + Y).$$

RÉPONSE

$Z = 0{,}6\,(X + Y)$.

2.b. En déduire $E(Z) = 120$ et $V(Z) = 1728$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = 0{,}6\big(E(X) + E(Y)\big) = 0{,}6\,(96 + 104) = 0{,}6 \times 200 = 120.$$

Comme X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, et $V(aZ) = a^2 V(Z)$:

$$V(Z) = 0{,}6^2\big(V(X) + V(Y)\big) = 0{,}36\,(3\,114 + 1\,686) = 0{,}36 \times 4\,800 = 1\,728.$$

RÉPONSE

$E(Z) = 120$ et $V(Z) = 1\,728$.

3.a. Espérance et variance de M_n

Les Z_i sont indépendantes et de même loi que Z, donc $E(Z_i) = 120$ et $V(Z_i) = 1\,728$.

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\big(E(Z_1) + \cdots + E(Z_n)\big) = \frac{1}{n} \times n \times 120 = 120,$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\big(V(Z_1) + \cdots + V(Z_n)\big) = \frac{1}{n^2} \times n \times 1\,728 = \frac{1\,728}{n}.$$

RÉPONSE

$E(M_n) = 120$ et $V(M_n) = \dfrac{1\,728}{n}$.

3.b. Application de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev

MÉTHODE

Inégalité de Bienaymé–Tchebychev : $P\big(|M_n - E(M_n)| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$. Ici $114 < M_n < 126 \iff |M_n - 120| < 6$, donc $a = 6$.

$$P\big(|M_n - 120| \geqslant 6\big) \leqslant \frac{1\,728/n}{6^2} = \frac{1\,728}{36\,n} = \frac{48}{n},$$

donc, en passant à l'événement contraire :

$$P(114 < M_n < 126) = P\big(|M_n - 120| < 6\big) \geqslant 1 - \frac{48}{n}.$$

On cherche n tel que $1 - \dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85$:

$$1 - \frac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \iff \frac{48}{n} \leqslant 0{,}15 \iff n \geqslant \frac{48}{0{,}15} = 320.$$

RÉPONSE

Le plus petit entier convenable est $n = 320$. Pour un échantillon d'au moins 320 familles, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev garantit qu'il y a au moins $85\,\%$ de chances que le prix moyen payé soit compris (strictement) entre 114 € et 126 €.

Exercice 2 — Vrai/Faux

(4 pts)

1. Géométrie dans l'espace

RAPPEL

$(d) : x = t,\ y = -1{,}5 - t,\ z = 2 - 2t$ (vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$) ; $A(3\,;0\,;2)$, $B(2\,;1\,;-3)$; $(P) : -x + y - 5z - 0{,}5 = 0$.

a. Affirmation 1 *(P) est orthogonal à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$.*

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (P) est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à (P), donc $(P) \perp (AB)$. Le milieu de $[AB]$ est $I\left(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$; on vérifie :

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

donc $I \in (P)$.

RÉPONSE

Affirmation **VRAIE** : $\overrightarrow{AB}$ est normal à (P) et le milieu de $[AB]$ appartient à (P).

b. Affirmation 2 *Les droites (d) et (AB) sont sécantes.*

On paramètre (AB) par $A + s\,\overrightarrow{AB} = (3 - s\,;\ s\,;\ 2 - 5s)$ et on cherche (t, s) tels que les points coïncident :

$$\begin{cases} t = 3 - s \\ -1{,}5 - t = s \\ 2 - 2t = 2 - 5s \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $t + s = 3$ et $t + s = -1{,}5$: c'est impossible. Le système n'a pas de solution, donc les droites ne se coupent pas. Comme $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, elles ne sont pas parallèles non plus : elles sont *non coplanaires*.

RÉPONSE

Affirmation **FAUSSE** : le système est incompatible ($t + s = 3$ et $t + s = -1{,}5$), donc (d) et (AB) ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

c. Affirmation 3 $\widehat{ACB} \approx 70{,}5°$*, avec* $C(1{,}5\,;-3\,;-1)$.

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1{,}5\\3\\3\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0{,}5\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1{,}5 \times 0{,}5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0{,}75 + 12 - 6 = 6{,}75,$$

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5, \qquad \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{0{,}5^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5.$$

$$\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{6{,}75}{4{,}5 \times 4{,}5} = \frac{6{,}75}{20{,}25} = \frac{1}{3}, \qquad \widehat{ACB} = \arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 70{,}5°.$$

RÉPONSE

Affirmation **VRAIE** : $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \dfrac{1}{3}$, donc $\widehat{ACB} \approx 70{,}5°$.

2. Escape game (dénombrement)

Affirmation 4 *Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.*

MÉTHODE

Porte A : code *ordonné* de 3 symboles distincts parmi $8 \Rightarrow$ arrangement. Porte B : code *non ordonné* de 4 symboles distincts parmi $8 \Rightarrow$ combinaison.

Nombre de codes possibles :

$$\text{Porte A} \;:\; 8 \times 7 \times 6 = 336, \qquad \text{Porte B} \;:\; \binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70.$$

Comme un seul code ouvre chaque porte :

$$P(\text{Clotilde}) = \frac{1}{336} \approx 0{,}0030, \qquad P(\text{Titouan}) = \frac{1}{70} \approx 0{,}0143.$$

RÉPONSE

Affirmation **VRAIE** : $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, donc Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Exercice 3 — Équation différentielle et suite

(6 pts)

Partie A : Phase de chauffage

RAPPEL

$(E) : y' = -0{,}035\, y + 0{,}91$ sur $[0\,;+\infty[$, avec $T(0) = 18$.

1. Solutions de (E)

MÉTHODE

Les solutions de $y' = a\,y + b$ (avec $a \neq 0$) sont $y(t) = K\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$.

Ici $a = -0{,}035$ et $b = 0{,}91$, avec $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{0{,}91}{0{,}035} = 26$.

RÉPONSE

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto K\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} + 26$, $K \in \mathbb{R}$.

2. Expression de $T(t)$

La condition $T(0) = 18$ donne $K\mathrm{e}^{0} + 26 = 18$, soit $K = -8$.

RÉPONSE

Pour tout $t \geqslant 0$: $T(t) = 26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035\,t}$.

3. Temps pour atteindre 20 °C

$$T(t) = 20 \iff 26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} = 20 \iff \mathrm{e}^{-0{,}035\,t} = \frac{6}{8} = 0{,}75 \iff t = \frac{\ln(0{,}75)}{-0{,}035} \approx 8{,}22.$$

Soit $t \approx 8{,}22$ dizaines de minutes, c'est-à-dire environ $82{,}2$ minutes.

RÉPONSE

La pièce atteint 20 °C au bout d'environ 82 minutes, soit **1 h 22 min**.

4. La température peut-elle dépasser 28 °C ?

Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} > 0$, donc $8\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} > 0$ et :

$$T(t) = 26 - 8\mathrm{e}^{-0{,}035\,t} < 26.$$

De plus $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 26$ (car $\mathrm{e}^{-0{,}035t} \to 0$).

RÉPONSE

Non : $T(t) < 26 < 28$ pour tout $t \geqslant 0$. La température tend vers 26 °C sans jamais l'atteindre ; elle ne peut donc pas dépasser 28 °C.

Partie B : Phase de refroidissement

RAPPEL

$u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0{,}965\, u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n}$.

1. Calcul de u_1

$$u_1 = 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^0 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07 = 19{,}72.$$

RÉPONSE

$u_1 = 19{,}72$.

2. Démonstration par récurrence : $u_n > 10$ pour tout n

Initialisation. $u_0 = 20 > 10$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons $u_n > 10$ pour un entier n fixé. Alors $0{,}965\,u_n > 9{,}65$, et comme $0{,}35 > 0$ et $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 0$:

$$u_{n+1} = 0{,}965\,u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 9{,}65 + 0{,}35 + 0 = 10.$$

La propriété est héréditaire.

RÉPONSE

Par récurrence, $u_n > 10$ pour tout entier naturel n.

3. Convergence de (u_n)

RÉPONSE

La suite (u_n) est décroissante (admis) et minorée par 10. D'après le théorème de la convergence monotone, elle est donc **convergente**.

4.a. Équation vérifiée par la limite

MÉTHODE

Si $u_n \to \ell$, alors $u_{n+1} \to \ell$. De plus $\mathrm{e}^{-0{,}1n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = 0{,}965\,u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n}$, on obtient $\ell = 0{,}965\,\ell + 0{,}35 + 0$.

RÉPONSE

La limite ℓ est solution de l'équation $x = 0{,}965\,x + 0{,}35$.

4.b. Valeur de ℓ et interprétation

$$x = 0{,}965\,x + 0{,}35 \iff 0{,}035\,x = 0{,}35 \iff x = 10.$$

RÉPONSE

$\ell = 10$: selon ce modèle de refroidissement, la température de la pièce tendrait vers 10 °C (en l'absence de rallumage du chauffage).

5.a. Programme Python complété

```python
def marche():
    n = 0
    u = 20
    while u > 18:
        u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
        n = n + 1
    return n
```

RÉPONSE

Ligne 4 : `while u > 18 :` ligne 5 : `u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)`
ligne 6 : `n = n+1`.
(La fonction `exp` provient du module `math`.)

5.b. Temps de remise en marche
En calculant les termes successifs, on obtient $u_7 \approx 18{,}12 > 18$ et $u_8 \approx 17{,}87 \leqslant 18$.

RÉPONSE

Le système se remet en marche pour $n = 8$, soit au bout de **8 dizaines de minutes** (80 minutes) de refroidissement.

Exercice 4 — Fonction logarithme

(5 pts)

Partie A

RAPPEL

$f(x) = a + \dfrac{b\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. La courbe passe par $A(0\,;1)$ et T_A est la tangente en A.

1. Justifier $a = 1$

$$f(0) = a + \frac{b\ln(1)}{1} = a + 0 = a.$$

Comme $A(0\,;1)$ appartient à la courbe, $f(0) = 1$, donc $a = 1$.

RÉPONSE

$a = 1$.

2.a. Valeur de $f'(0)$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A en A. Graphiquement, T_A passe par $A(0\,;1)$ et coupe l'axe des abscisses en $-0{,}25$, d'où un coefficient directeur $\dfrac{1-0}{0-(-0{,}25)} = 4$.

RÉPONSE

$f'(0) = 4$.

2.b. Signe de $f''(1)$

Au voisinage de $x = 1$, la courbe est *concave* (tournée vers le bas) : les pentes des tangentes diminuent, donc f' est décroissante.

RÉPONSE

$f''(1) < 0$.

3.a. Expression de $f'(x)$

MÉTHODE

On dérive $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ comme un quotient $\dfrac{u}{v}$, avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$: $u' = \dfrac{1}{x+1}$, $v' = 1$.

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1) - \ln(x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

La constante a a une dérivée nulle, donc :

$$f'(x) = \frac{b\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}.$$

RÉPONSE

$f'(x) = \dfrac{b\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$.

3.b. Valeur de b

$$f'(0) = \frac{b\big(1-\ln 1\big)}{(0+1)^2} = \frac{b(1-0)}{1} = b.$$

Or $f'(0) = 4$ (question 2.a), donc $b = 4$.

RÉPONSE
$b = 4$.

Partie B

RAPPEL
On admet $f(x) = 1 + \dfrac{4\ln(x+1)}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Asymptote $y = 1$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 4\times 0 = 1$.

RÉPONSE
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

2. Résolution de $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$

$$1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1 \iff x+1 < \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e} - 1.$$

RÉPONSE
L'ensemble des solutions est $S =]-1\,;\,\mathrm{e}-1[$.

3. Tableau de variation de f

Comme $4 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$, le signe de $f'(x) = \dfrac{4\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$ est celui de $1 - \ln(x+1)$ (étudié à la question 2). Le maximum est atteint en $x = \mathrm{e} - 1$:

$$f(\mathrm{e}-1) = 1 + \frac{4\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = 1 + \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{4}{\mathrm{e}}$	↘	1

RÉPONSE
f est croissante sur $]-1\,;\mathrm{e}-1]$ puis décroissante sur $[\mathrm{e}-1\,;+\infty[$. Son maximum, atteint en $x = \mathrm{e}-1$, vaut $f(\mathrm{e}-1) = 1 + \dfrac{4}{\mathrm{e}} \approx 2{,}47$.

4. Unique solution de $f(x) = 1{,}5$ sur $[2\,;+\infty[$

MÉTHODE

Sur $[2\,;+\infty[$ (inclus dans $[\mathrm{e}-1\,;+\infty[$), f est continue et strictement décroissante : c'est une bijection, on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

Sur $[2\,;+\infty[$, f décroît continûment de $f(2) = 1 + \dfrac{4\ln 3}{3} \approx 2{,}46$ vers $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Comme $1{,}5 \in]1\,;2{,}46]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution α sur $[2\,;+\infty[$. Par balayage à la calculatrice, $f(25{,}0) \approx 1{,}501$ et $f(25{,}1) \approx 1{,}500$.

RÉPONSE

L'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur $[2\,;+\infty[$, avec $\alpha \approx 25{,}1$.

5.a. Calcul de l'intégrale

MÉTHODE

On reconnaît une forme $u'\,u$ avec $u(x) = \ln(x+1)$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, dont une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\big(\ln(x+1)\big)^2}{2}\right]_0^2 = \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

RÉPONSE

$\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$

5.b. Aire du domaine

Sur $[0\,;2]$, $f(x) \geqslant 1 > 0$: l'aire cherchée vaut $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = [x]_0^2 + 4\times\frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

RÉPONSE

L'aire du domaine vaut $\mathcal{A} = 2 + 2(\ln 3)^2 \approx 4{,}41$ unités d'aire.