Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2 — Sujet 26-MATJ2G11

Centres Étrangers

Exercice 1 — Géométrie dans l'espace

(4 pts)

RAPPEL

Repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. $A(1\,;0\,;3)$, $B(2\,;1\,;-1)$, $C(1\,;1\,;1)$, $H(0\,;2\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$.

1. Les points A, B et C définissent un plan

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$. La première coordonnée imposerait $1 = k \times 0 = 0$, ce qui est impossible. Les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

RÉPONSE

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés et **définissent un plan**.

2. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 1 + 4\times 1 + 2\times(-4) = 4+4-8 = 0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 0 + 4\times 1 + 2\times(-2) = 0+4-4 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

RÉPONSE

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur **normal** au plan (ABC).

3. Équation cartésienne du plan (ABC)

Un plan de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $4x+4y+2z+d=0$. Le point $A(1\,;0\,;3)$ appartient au plan :

$$4\times 1 + 4\times 0 + 2\times 3 + d = 0 \iff 10 + d = 0 \iff d = -10.$$

On obtient $4x+4y+2z-10=0$, que l'on simplifie en divisant par 2.

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x+2y+z-5=0$.

4. Le point H appartient au plan (ABC)

On remplace les coordonnées de $H(0\,;2\,;1)$ dans le membre de gauche :

$$2\times 0+2\times 2+1-5=0+4+1-5=0.$$

RÉPONSE

Les coordonnées de H vérifient l'équation du plan : $H\in(ABC)$.

5. Mesure en degré de l'angle $\widehat{BAH}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=1\times(-1)+1\times 2+(-4)\times(-2)=-1+2+8=9,$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2},\qquad \|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3.$$

Avec $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AH}\|\cos\left(\widehat{BAH}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{BAH}\right)=\frac{9}{3\sqrt{2}\times 3}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

RÉPONSE

$\cos\left(\widehat{BAH}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\widehat{BAH}=45°$.

6. Représentation paramétrique de la droite (d)

(d) est orthogonale au plan (ABC) : elle admet pour vecteur directeur tout vecteur normal au plan, par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ (colinéaire à $\vec{n}$). Elle passe par $H(0\,;2\,;1)$:

RÉPONSE

$$(d):\begin{cases}x=2t\\y=2+2t\\z=1+t\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

7. Coordonnées du point S

MÉTHODE

Le point H appartient au plan (ABC) et la droite (d) lui est perpendiculaire : pour tout point S de (d), la distance de S au plan (ABC) est donc égale à la longueur HS.

Le point S appartient à la droite (d) et $HS=6$ équivaut à :

$$\begin{cases}x_S=2t\\y_S=2+2t\\z_S=1+t\\\sqrt{(x_S-0)^2+(y_S-2)^2+(z_S-1)^2}=6\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

$$\iff\begin{cases}x_S=2t\\y_S=2+2t\\z_S=1+t\\\sqrt{(2t-0)^2+(2+2t-2)^2+(1+t-1)^2}=6\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_S = 2t \\ y_S = 2+2t \\ z_S = 1+t \\ \sqrt{4t^2+4t^2+t^2} = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_S = 2t \\ y_S = 2+2t \\ z_S = 1+t \\ \sqrt{9t^2} = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_S = 2t \\ y_S = 2+2t \\ z_S = 1+t \\ 3t = 6 \end{cases}, \text{ avec } t > 0$$

$$\iff \begin{cases} x_S = 2\times 2 \\ y_S = 2+2\times 2 \\ z_S = 1+2 \\ t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_S = 4 \\ y_S = 6 \\ z_S = 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

RÉPONSE

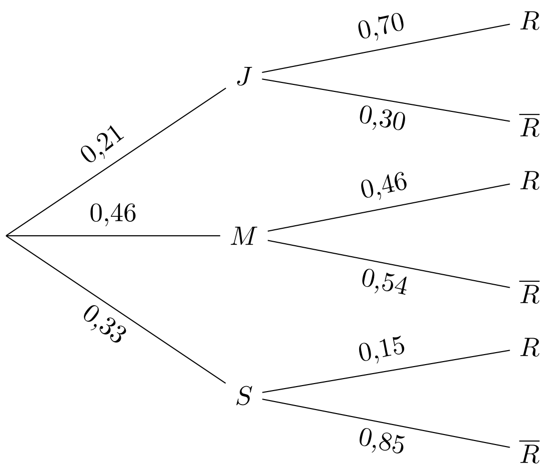
Le point cherché est $S(4\,;6\,;3)$.

Exercice 2 — Probabilités

(4 pts)

Partie A

1. Arbre de probabilité complété



2. Calcul et interprétation de $P(M \cap R)$

D'après la règle du produit le long d'une branche :

$$P(M \cap R) = P(M) \times P_M(R) = 0{,}46 \times 0{,}46 = 0{,}2116 \approx 0{,}212.$$

RÉPONSE

$P(M \cap R) \approx 0{,}212$: la probabilité que la personne interrogée ait *entre* 30 *et* 59 *ans et* ait déjà publié sur ce réseau social est d'environ $0{,}212$.

3.a. Probabilité que la personne ait déjà publié

Les événements J, M et S forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(J \cap R) + P(M \cap R) + P(S \cap R)$$
$$P(R) = P(J) \times P_J(R) + P(M) \times P_M(R) + P(S) \times P_S(R)$$
$$P(R) = 0{,}21 \times 0{,}70 + 0{,}46 \times 0{,}46 + 0{,}33 \times 0{,}15 = 0{,}147 + 0{,}2116 + 0{,}0495$$
$$P(R) = 0{,}4081$$

RÉPONSE

$P(R) \approx 0{,}408$. La probabilité que cette personne ait déjà publié sur ce réseau social est d'environ $0{,}4081$.

3.b. Probabilité qu'elle ait au moins 60 ans sachant qu'elle a publié

On cherche $P_R(S)$:

$$P_R(S) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}33 \times 0{,}15}{0{,}4081} = \frac{0{,}0495}{0{,}4081} \approx 0{,}121.$$

RÉPONSE

$P_R(S) \approx 0{,}121$. La probabilité que cette personne ait au moins 60 ans sachant qu'elle a déjà publié sur ce réseau social est de $0{,}121$.

Partie B

1. Loi suivie par X

On répète $n = 100$ fois, de façon indépendante et identique (tirages assimilés à des tirages avec remise), une même épreuve de Bernoulli de succès « la personne a déjà publié », de probabilité $p = 0{,}41$. La variable X compte le nombre de succès.

RÉPONSE

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}41$: $X \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}41)$.

2. Probabilité qu'au moins la moitié des personnes ait publié

On cherche $P(X \geqslant 50)$. L'événement contraire est $\{X \leqslant 49\}$:

$$P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 49).$$

À la calculatrice, $P(X \leqslant 49) \approx 0{,}957$, d'où $P(X \geqslant 50) \approx 1 - 0{,}957 \approx 0{,}043$.

RÉPONSE

La probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes ait déjà publié est d'environ $\mathbf{0{,}043}$.

3. Espérance de X et interprétation

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$:

$$E(X) = 100 \times 0{,}41 = 41.$$

RÉPONSE

$E(X) = 41$. Sur un grand nombre de sondages de 100 personnes, on s'attend à compter **en moyenne** 41 **personnes** ayant déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

RAPPEL

Les variables $X_1, \dots, X_{150}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(100\,;0{,}41)$, donc de même espérance $E(X_i) = 41$ et de même variance

$$V(X_i) = np(1-p) = 100 \times 0{,}41 \times 0{,}59 = 24{,}19.$$

La variable $Y = \dfrac{1}{150}\left(X_1 + \dots + X_{150}\right)$ est leur moyenne.

Espérance et variance de Y. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} E(X_i) = \frac{1}{150} \times 150 \times 41 = 41.$$

Par indépendance des X_i :

$$V(Y) = \frac{1}{150^2}\sum_{i=1}^{150} V(X_i) = \frac{1}{150^2} \times 150 \times 24{,}19 = \frac{24{,}19}{150} \approx 0{,}1613.$$

MÉTHODE

L'encadrement $37 < Y < 45$ est centré sur $E(Y) = 41$: il s'écrit $|Y - 41| < 4$. On applique l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev avec $a = 4$.

$$P\big(|Y - E(Y)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(Y)}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad P\big(|Y - 41| \geqslant 4\big) \leqslant \frac{24{,}19/150}{4^2} = \frac{0{,}1613}{16} \approx 0{,}0101.$$

En passant à l'événement contraire :

$$P(37 < Y < 45) = P\big(|Y - 41| < 4\big) \geqslant 1 - 0{,}0101 \approx 0{,}9899.$$

RÉPONSE

$P(37 < Y < 45) \geqslant 0{,}9899 > 0{,}98$: la probabilité que Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est bien strictement supérieure à $98\,\%$.

Exercice 3 — Fonction logarithme et suites

(6 pts)

Partie A

RAPPEL

f est définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(3x^2+2x)$.

1. Montrons que f est strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$

On pose $u(x)=3x^2+2x$, de sorte que $f=\ln\circ u$. Sur $[2\,;+\infty[$, u est dérivable et strictement positive, donc :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{6x+2}{3x^2+2x}.$$

Sur $[2\,;+\infty[$, le numérateur $6x+2>0$ et le dénominateur $3x^2+2x>0$, donc $f'(x)>0$.

RÉPONSE

$f'(x)>0$ sur $[2\,;+\infty[$: la fonction f est **strictement croissante** sur cet intervalle.

2.a. Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α

MÉTHODE

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue et strictement monotone).

La fonction g est continue sur $[2\,;+\infty[$ (différence de fonctions continues) et, d'après l'énoncé, strictement décroissante. On calcule la valeur en 2 :

$$g(2)=f(2)-2=\ln(3\times4+2\times2)-2=\ln(16)-2\approx0{,}77>0,$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty<0$. Ainsi 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $g(2)$.

RÉPONSE

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une **unique** solution α sur $[2\,;+\infty[$.

2.b. Valeur approchée de α

À la calculatrice, $g(4{,}04)\approx0{,}004>0$ et $g(4{,}05)\approx-0{,}002<0$, donc $4{,}04<\alpha<4{,}05$.

RÉPONSE

$\alpha\approx4{,}05$ (arrondi au centième).

2.c. Tableau de signes de g sur $[2\,;+\infty[$

g est strictement décroissante et s'annule en α : elle est positive avant α et négative après.

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

RÉPONSE

$g(x)>0$ sur $[2\,;\alpha[$, $\quad g(\alpha)=0$, $\quad g(x)<0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

RAPPEL

(a_n) est définie par a_0 avec $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n) = f(a_n)$.

1. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$

On note $P(n)$: $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

– *Initialisation.* Par hypothèse $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$: $P(0)$ est vraie.

– *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie. Comme f est croissante sur $[2\,;+\infty[$, on applique f en conservant l'ordre :

$$f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha), \quad \text{c.-à-d.} \quad f(2) \leqslant a_{n+1} \leqslant f(\alpha).$$

Or $f(2) = \ln(16) \approx 2{,}77 \geqslant 2$, et $g(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) = \alpha$. Donc $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$: $P(n+1)$ est vraie.

– *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n : $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Montrons que la suite (a_n) est croissante

Pour tout n, $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = g(a_n)$.
D'après la partie B.1, $a_n \in [2\,;\alpha]$, intervalle sur lequel $g(x) \geqslant 0$ (partie A.2.c).
Donc $a_{n+1} - a_n = g(a_n) \geqslant 0$.

RÉPONSE

Pour tout n, $a_{n+1} \geqslant a_n$: la suite (a_n) est **croissante**.

3. montrons que la suite (a_n) converge

La suite (a_n) est croissante (B.2) et majorée par α (B.1).

RÉPONSE

Toute suite croissante et majorée converge : la suite (a_n) **converge**.

4. Déterminons la limite de (a_n)

Notons ℓ la limite de (a_n). Comme $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ pour tout n, par passage à la limite $\ell \in [2\,;\alpha]$. La fonction f étant continue sur $[2\,;+\infty[$, le passage à la limite dans $a_{n+1} = f(a_n)$ donne $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$. Or l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $[2\,;+\infty[$ est α, et $\alpha \in [2\,;\alpha]$.

RÉPONSE

La limite de la suite (a_n) est $\ell = \alpha$.

Partie C

RAPPEL

Ici $a_0 = 2$. La suite (b_n) vérifie $b_0 = 10$ et $b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$; elle est strictement décroissante et converge vers α.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$

On note $Q(n)$: $a_n \leqslant b_n$.

– *Initialisation.* $a_0 = 2 \leqslant 10 = b_0$: $Q(0)$ est vraie.

– *Hérédité.* Supposons $Q(n)$ vraie. On a $a_n \in [2\,;\alpha]$ (partie B) et $b_n > \alpha \geqslant 2$ (suite strictement décroissante de limite α) : les deux termes appartiennent à $[2\,;+\infty[$, où f est croissante. De $a_n \leqslant b_n$

on déduit :

$$f(a_n) \leqslant f(b_n) \quad \text{c.-à-d.} \quad a_{n+1} \leqslant b_{n+1}.$$

$Q(n+1)$ est vraie.

– *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n : $a_n \leqslant b_n$.

2.a. Valeurs renvoyées par `algo(2)`

MÉTHODE

La boucle calcule simultanément les termes de (a_n) (variable `a`) et de (b_n) (variable `b`) et s'arrête dès que l'écart $b_n - a_n$ devient inférieur ou égal à 10^{-2}. La variable `n` compte le nombre d'itérations.

En déroulant le script, l'écart $b_n - a_n$ passe sous 10^{-2} pour la première fois au rang $n = 9$ (on a alors $a_9 \approx 4{,}044$ et $b_9 \approx 4{,}050$).

RÉPONSE

`algo(2)` renvoie le couple $(9\,;\,4{,}044)$.

2.b. Interprétation

Comme (a_n) croît vers α et (b_n) décroît vers α avec $a_n \leqslant b_n$, on a pour tout n : $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$. Au rang $n = 9$, $b_9 - a_9 \leqslant 10^{-2}$.

RÉPONSE

Il a fallu 9 **itérations** pour encadrer α par a_9 et b_9 avec une amplitude inférieure à 10^{-2} : la valeur $a_9 \approx 4{,}044$ est alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près (par défaut).

Exercice 4 — Fonctions, équation différentielle et tangentes

(6 pts)

Partie A

On lit les courbes en utilisant deux principes : une fonction et sa dérivée s'annulent là où la « fonction du dessus » présente une tangente horizontale, et le signe de la dérivée donne le sens de variation.

- La courbe pleine C_2 s'annule précisément à l'abscisse où la courbe en tirets C_3 atteint son maximum, et C_2 est positive là où C_3 croît, négative là où C_3 décroît : C_2 est donc la dérivée de C_3.
- De même, C_3 s'annule là où la courbe pointillée C_1 change de sens de variation, et le signe de C_3 suit les variations de C_1 : C_3 est la dérivée de C_1.

RÉPONSE

C_1 représente f, C_3 représente f', C_2 représente f''.

Partie B

RAPPEL

Équation différentielle (E) : $y' + y = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrons que $g(x) = (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E)

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit). On dérive :

$$g'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3x)\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) = \mathrm{e}^{-x}\big(2x-3-x^2+3x\big) = \mathrm{e}^{-x}\big(-x^2+5x-3\big).$$

On calcule alors $g'(x) + g(x)$:

$$g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(-x^2+5x-3\big) + \mathrm{e}^{-x}\big(x^2-3x\big) = \mathrm{e}^{-x}\big(2x-3\big) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

RÉPONSE

$g'(x) + g(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}$: la fonction g est une **solution particulière** de (E).

2. Solutions de $y' + y = 0$

RÉPONSE

Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Solutions de (E)

MÉTHODE

Les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière de (E) et des solutions de l'équation homogène associée.

RÉPONSE

Les solutions de (E) sont les fonctions

$$y(x) = (x^2-3x)\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} = (x^2-3x+C)\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

4. Solution f telle que $f(0) = 2$

$$f(0) = (0-0+C)\mathrm{e}^{0} = C = 2 \iff C = 2.$$

RÉPONSE

La solution cherchée est $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C

RAPPEL

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$, de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. Signe de f sur $\mathbb{R}$

On factorise le trinôme : $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ (racines évidentes 1 et 2). Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x, le signe de $f(x)$ est celui de $(x-1)(x-2)$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

RÉPONSE

$f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$, $\quad f(1) = f(2) = 0$, $\quad f(x) < 0$ sur $]1\,;2[$.

2.a. Limite de f en $-\infty$

Quand $x \to -\infty$: $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ et $x^2 - 3x + 2 \to +\infty$.

RÉPONSE

Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2.b. Limite de f en $+\infty$

On développe $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

RÉPONSE

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$).

3.a. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

MÉTHODE

On effectue deux intégrations par parties successives, en dérivant à chaque fois la partie polynomiale et en primitivant e^{-x} (primitive $-\mathrm{e}^{-x}$).

Première IPP. On pose $u(x) = x^2 - 3x + 2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où $u'(x) = 2x - 3$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$:

$$I = \Big[-(x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme tout intégré vaut $-(1-3+2)\mathrm{e}^{-1}-\big(-(0-0+2)\mathrm{e}^{0}\big)=0+2=2$. Donc :

$$I=2+\underbrace{\int_0^1(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}_{=J}.$$

Seconde IPP pour J. On pose $u(x)=2x-3$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{-x}$, d'où $u'(x)=2$ et $v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$:

$$J=\Big[-(2x-3)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme tout intégré vaut $-(2-3)\mathrm{e}^{-1}-\big(-(0-3)\mathrm{e}^{0}\big)=\mathrm{e}^{-1}-3$, et $\displaystyle\int_0^1 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\big[-2\mathrm{e}^{-x}\big]_0^1=2-2\mathrm{e}^{-1}$.
Ainsi :

$$J=\big(\mathrm{e}^{-1}-3\big)+\big(2-2\mathrm{e}^{-1}\big)=-1-\mathrm{e}^{-1}.$$

Finalement :

$$I=2+J=2-1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

RÉPONSE

$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.b. Interprétation graphique

Sur $[0\,;1]$, on a $f(x)\geqslant 0$ (partie C.1).

RÉPONSE

$I=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\approx 0{,}632$ est l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie D

1. Ordonnée à l'origine de la tangente (T_a)

La tangente (T_a) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. On commence par dériver f :

$$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(x^2-3x+2)+\mathrm{e}^{-x}(2x-3)=\mathrm{e}^{-x}\big(-x^2+3x-2+2x-3\big)=\mathrm{e}^{-x}\big(-x^2+5x-5\big).$$

Le point d'intersection de (T_a) avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée $y(0)$:

$$y(0)=f(a)-a\,f'(a)=\mathrm{e}^{-a}(a^2-3a+2)-a\,\mathrm{e}^{-a}(-a^2+5a-5).$$

On factorise par e^{-a} :

$$y(0)=\mathrm{e}^{-a}\big[a^2-3a+2+a^3-5a^2+5a\big]=\big(a^3-4a^2+2a+2\big)\mathrm{e}^{-a}.$$

RÉPONSE

L'ordonnée du point d'intersection de (T_a) avec l'axe des ordonnées est $\big(a^3-4a^2+2a+2\big)\mathrm{e}^{-a}$.

2. Nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine

MÉTHODE

Une tangente (T_a) passe par l'origine $O(0\,;0)$ si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle. On dénombre donc les valeurs de a annulant l'expression précédente.

Comme $\mathrm{e}^{-a} > 0$:

$$\left(a^3 - 4a^2 + 2a + 2\right)\mathrm{e}^{-a} = 0 \iff a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0.$$

On étudie la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(a) = a^3 - 4a^2 + 2a + 2$. Elle est dérivable et $P'(a) = 3a^2 - 8a + 2$. Le discriminant vaut $\Delta = 64 - 24 = 40 > 0$, d'où deux racines :

$$a_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \approx 0{,}28, \qquad a_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{3} \approx 2{,}39.$$

On en déduit le tableau de variation de P (avec $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$) :

a	$-\infty$		a_1		a_2		$+\infty$
$P'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P		↗	$\approx 2{,}27$	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				$\approx -2{,}42$		

P est continue et strictement monotone sur chacun des trois intervalles. Le maximum local $P(a_1) \approx 2{,}27$ est strictement positif et le minimum local $P(a_2) \approx -2{,}42$ est strictement négatif. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chaque intervalle :

- sur $]-\infty\,;a_1]$, P croît de $-\infty$ à $P(a_1) > 0$: une racine ;
- sur $[a_1\,;a_2]$, P décroît de $P(a_1) > 0$ à $P(a_2) < 0$: une racine ;
- sur $[a_2\,;+\infty[$, P croît de $P(a_2) < 0$ à $+\infty$: une racine.

RÉPONSE

L'équation $P(a) = 0$ admet **trois** solutions réelles : il existe exactement **trois tangentes** à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.