Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 1 — Sujet 26-MATJ1G11

Centres Étrangers

Exercice 1 — Probabilités

(5 pts)

RAPPEL DE COURS

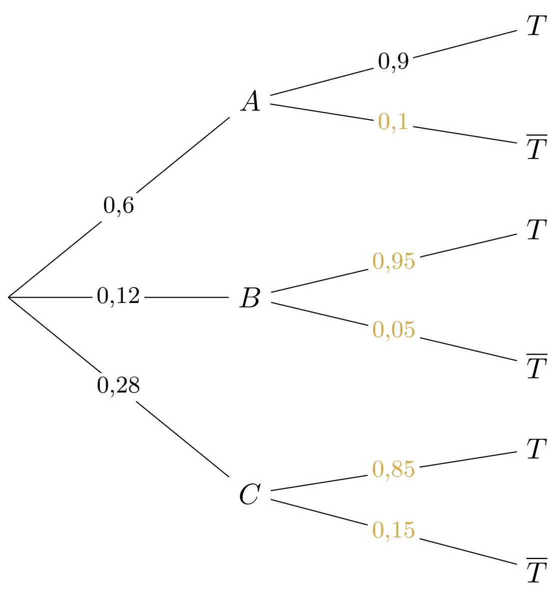
Stock de l'équipementier : $60\,\%$ de lames du fournisseur A, $12\,\%$ du fournisseur B, le reste ($28\,\%$) du fournisseur C. Les taux de conformité sont $90\,\%$ pour A, $95\,\%$ pour B et $85\,\%$ pour C. Ainsi :

$$P(A) = 0{,}6, \quad P(B) = 0{,}12, \quad P(C) = 0{,}28,$$

$$P_A(T) = 0{,}9, \quad P_B(T) = 0{,}95, \quad P_C(T) = 0{,}85.$$

Partie A

1. Arbre de probabilité complété



RÉPONSE

Probabilités à reporter (en doré) : les branches issues de la racine ($0{,}6$; $0{,}12$; $0{,}28$), puis sur chaque sous-arbre la probabilité de $\overline{T}$ obtenue par complément à 1 et celle de T : $P_A(\overline{T}) = 0{,}1$, $P_B(T) = 0{,}95$, $P_B(\overline{T}) = 0{,}05$, $P_C(T) = 0{,}85$, $P_C(\overline{T}) = 0{,}15$.

2. Calcul de $P(A \cap \overline{T})$ et interprétation

D'après la règle du produit le long d'une branche :

$$P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06.$$

RÉPONSE

$P(A \cap \overline{T}) = 0{,}06$. Cela signifie que $6\,\%$ des lames vendues par l'équipementier proviennent du fournisseur A *et* ne sont pas conformes.

3. La probabilité que la lame soit conforme est $0{,}892$

MÉTHODE

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales.

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$$
$$P(T) = P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) + P(C)P_C(T)$$
$$P(T) = 0{,}6 \times 0{,}9 + 0{,}12 \times 0{,}95 + 0{,}28 \times 0{,}85 = 0{,}54 + 0{,}114 + 0{,}238 = 0{,}892.$$

RÉPONSE

La probabilité que la lame testée soit conforme est $P(T) = 0{,}892$.

4. Probabilité que la lame provienne de B sachant qu'elle n'est pas conforme

On cherche $P_{\overline{T}}(B)$. Comme $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}892 = 0{,}108$ et $P(B \cap \overline{T}) = P(B) \times P_B(\overline{T}) = 0{,}12 \times 0{,}05 = 0{,}006$:

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}006}{0{,}108} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056.$$

RÉPONSE

$P_{\overline{T}}(B) \approx 0{,}056$.

Partie B

1. Loi de la variable aléatoire X

MÉTHODE

On répète 75 fois, de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli de succès « la lame n'est pas conforme », de probabilité $0{,}108$. La variable X compte le nombre de succès.

RÉPONSE

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0{,}108$: $X \sim \mathcal{B}(75\,;0{,}108)$.

2. Probabilité que 6 lames exactement soient non conformes

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times 0{,}892^{69} \approx 0{,}120.$$

RÉPONSE

$P(X = 6) \approx 0{,}120$.

3. La probabilité d'avoir strictement plus de 8 lames non conformes est-elle inférieure à $50\,\%$?

« Strictement plus de 8 lames » se traduit par $X > 8$, c'est-à-dire $X \geqslant 9$:

$$P(X > 8) = P(X \geqslant 9) = 1 - P(X \leqslant 8) \approx 1 - 0{,}578 \approx 0{,}422.$$

Cette probabilité, environ $42{,}2\,\%$, est bien inférieure à $50\,\%$.

RÉPONSE

$P(X > 8) \approx 0{,}422 < 0{,}5$: l'équipementier a **raison**.

Partie C

1. Espérance $E(M_n)$ et variance $V(M_n)$

Chaque X_i suit la loi $\mathcal{B}(75\,;0{,}108)$, donc :

$$E(X_i) = 75 \times 0{,}108 = 8{,}1, \qquad V(X_i) = 75 \times 0{,}108 \times 0{,}892 = 7{,}2252.$$

Par linéarité de l'espérance, et par indépendance pour la variance :

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times 8{,}1 = 8{,}1,$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times 7{,}2252 = \frac{7{,}2252}{n}.$$

RÉPONSE

$E(M_n) = 8{,}1$ et $V(M_n) = \dfrac{7{,}2252}{n}$.

2. Justification de l'inégalité

MÉTHODE

On applique l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev : $P\big(|M_n - E(M_n)| \geqslant a\big) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$.

Avec $E(M_n) = 8{,}1$ et $a = 2$:

$$P\big(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2\big) \leqslant \frac{V(M_n)}{2^2} = \frac{1}{4} \times \frac{7{,}2252}{n} = \frac{1{,}8063}{n}.$$

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n non nul : $P\big(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2\big) \leqslant \dfrac{1{,}8063}{n}$.

3. Valeur de n telle que $P\big(|M_n - 8{,}1| < 2\big) \geqslant 0{,}95$

En passant à l'événement contraire :

$$P\big(|M_n - 8{,}1| < 2\big) = 1 - P\big(|M_n - 8{,}1| \geqslant 2\big) \geqslant 1 - \frac{1{,}8063}{n}.$$

Il suffit donc que $1 - \dfrac{1{,}8063}{n} \geqslant 0{,}95$:

$$1 - \frac{1{,}8063}{n} \geqslant 0{,}95 \iff \frac{1{,}8063}{n} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \frac{1{,}8063}{0{,}05} = 36{,}126.$$

Comme n est entier, la plus petite valeur convenable est $n = 37$.

RÉPONSE

À partir de $n = 37$, on a $P\big(|M_n - 8{,}1| < 2\big) \geqslant 0{,}95$. Autrement dit, dès qu'il est présent à au moins 37 compétitions, l'équipementier est sûr à $95\,\%$ que le nombre moyen de lames non conformes par échantillon est compris entre $6{,}1$ et $10{,}1$.

Exercice 2 — Vrai ou Faux

(5 pts)

Affirmation 1

$(E)\ :\ y' + y = 2\cos(x)$ et $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$. On dérive :

$$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x).$$

$$f'(x) + f(x) = \big(-4\mathrm{e}^{-x} - \sin x + \cos x\big) + \big(4\mathrm{e}^{-x} + \cos x + \sin x\big) = 2\cos(x).$$

La fonction f vérifie bien l'équation (E).

RÉPONSE

Affirmation 1 **VRAIE** : f est solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2

$f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $2x = \sin(x)$. Posons $h(x) = 2x - \sin(x)$; alors :

$$h'(x) = 2 - \cos(x).$$

Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $h'(x) \geqslant 2 - 1 = 1 > 0$: h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle s'annule au plus une fois. Or $h(0) = 0 - 0 = 0$, donc $x = 0$ est l'unique solution.

RÉPONSE

Affirmation 2 **VRAIE** : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en un seul point, le point d'abscisse 0 (l'origine du repère).

Affirmation 3

$v_n = \dfrac{2n + \sin(n)}{n+1}$. Pour tout entier n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc :

$$\frac{2n-1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{2n+1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$. D'après le théorème d'encadrement (« des gendarmes »), (v_n) converge vers 2 : elle ne diverge pas.

RÉPONSE

Affirmation 3 **FAUSSE** : la suite (v_n) **converge** vers 2.

Affirmation 4

$u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrons par récurrence que $u_n = n^2$.

– *Initialisation* : $u_1 = 1 = 1^2$. La propriété est vraie au rang 1.

– *Hérédité* : supposons $u_n = n^2$ pour un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

La propriété est héréditaire.

– *Conclusion* : d'après le principe de récurrence, $u_n = n^2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

Affirmation 5

$u_n = \mathrm{e}^{-n}$, donc $u_n = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$: la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et de premier terme $u_0 = 1$. Comme $0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}.$$

RÉPONSE

Affirmation 5 **VRAIE** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace

(4 pts)

RAPPEL DE COURS

Repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Les sommets du cube ont pour coordonnées :

$$A(0\,;0\,;0),\ B(1\,;0\,;0),\ C(1\,;1\,;0),\ D(0\,;1\,;0),$$

$$E(0\,;0\,;1),\ F(1\,;0\,;1),\ G(1\,;1\,;1),\ H(0\,;1\,;1).$$

1. Coordonnées de I, J et K

I est le milieu de $[EF]$, J celui de $[EH]$ et K celui de $[AE]$:

$$I\left(\frac{0+1}{2}\,;0\,;1\right),\quad J\left(0\,;\frac{0+1}{2}\,;1\right),\quad K\left(0\,;0\,;\frac{0+1}{2}\right).$$

RÉPONSE

$I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right),\quad J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right),\quad K\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right).$

2.a. Produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\times 0+0\times\frac{1}{2}+1\times 1=1.$$

RÉPONSE

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=1.$

2.b. Mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$

MÉTHODE

On utilise $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\|\overrightarrow{AI}\|\times\|\overrightarrow{AJ}\|\times\cos\widehat{IAJ}$.

$$\|\overrightarrow{AI}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad \|\overrightarrow{AJ}\|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos\widehat{IAJ}=\frac{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}{\|\overrightarrow{AI}\|\,\|\overrightarrow{AJ}\|}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

D'où $\widehat{IAJ}=\arccos(0{,}8)\approx 36{,}9°$.

RÉPONSE

$\widehat{IAJ}\approx 36{,}9°.$

3.a. $\overrightarrow{KC}$ est normal au plan (AIJ)

$$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{AI} = 1\times\frac{1}{2} + 1\times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 1 = 0,$$

$$\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{AJ} = 1\times 0 + 1\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 1 = 0.$$

$\overrightarrow{KC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ du plan (AIJ).

RÉPONSE

$\overrightarrow{KC}$ est un vecteur **normal** au plan (AIJ).

3.b. Équation cartésienne du plan (AIJ)

Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $x+y-\frac{1}{2}z+d=0$. Le point $A(0\,;0\,;0)$ appartient au plan, donc $d=0$.

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x+y-\frac{1}{2}z=0$.

4.a. Coordonnées du point L, projeté orthogonal de C sur (AIJ)

MÉTHODE

L est le point d'intersection du plan (AIJ) et de la droite passant par C et dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{KC}$.

La droite passant par $C(1\,;1\,;0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique $\left(1+t\,;\ 1+t\,;\ -\frac{1}{2}t\right)$, $t\in\mathbb{R}$. On reporte dans l'équation du plan :

$$(1+t)+(1+t)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t\right)=0 \iff 2+\frac{9}{4}t=0 \iff t=-\frac{8}{9}.$$

D'où $\begin{cases} x_L = 1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}\\ y_L = 1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}\\ z_L = -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{4}{9}\end{cases}$

RÉPONSE

$L\left(\frac{1}{9}\,;\frac{1}{9}\,;\frac{4}{9}\right)$.

4.b. Distance du point C au plan (AIJ)

Cette distance est égale à la longueur CL :

$$\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}-1\\ \frac{1}{9}-1\\ \frac{4}{9}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{9}\\ -\frac{8}{9}\\ \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

$$CL=\|\overrightarrow{CL}\|=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64+64+16}{81}}=\sqrt{\frac{144}{81}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$

RÉPONSE

La distance du point C au plan (AIJ) est égale à $\frac{4}{3}$.

5.a. Représentation paramétrique de la droite (IM)

Avec $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ et $M(1\,;m\,;1)$:

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ m\\ 0\end{pmatrix}.$$

Un point $N(x\,;y\,;z)$ appartient à (IM) s'il existe $s\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IN}=s\,\overrightarrow{IM}$, d'où :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\\ y=0+ms\\ z=1+0\end{cases}$$

RÉPONSE

Une représentation paramétrique de (IM) est

$$(IM) : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}s + \dfrac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

5.b. Les droites (IM) et (KC) sont-elles coplanaires pour toute valeur de m ?

MÉTHODE

Deux droites sont coplanaires si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs et un vecteur joignant un point de chacune sont coplanaires, c'est-à-dire si le produit mixte (déterminant) de ces trois vecteurs est nul.

(IM) est dirigée par $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$ et passe par $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$; (KC) est dirigée par $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et passe par $K\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$. Le vecteur joignant les deux points est $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de ces trois vecteurs :

$$\det\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KI}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ m & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la première colonne :

$$\det = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}m.$$

Les deux droites sont coplanaires si, et seulement si, ce déterminant est nul :

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}m = 0 \iff m = \frac{1}{3}.$$

(De plus, $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{KC}$ ne sont jamais colinéaires car leurs troisièmes coordonnées imposeraient un coefficient nul, impossible pour les deux premières : les droites ne sont donc pas parallèles.)

RÉPONSE

Non : les droites (IM) et (KC) sont coplanaires *uniquement* lorsque $m = \dfrac{1}{3}$. On ne peut donc pas l'affirmer pour toute valeur de m.

Exercice 4 — Fonction et intégrale

(6 pts)

RAPPEL DE COURS

f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie A

1.a. Limites aux bornes de $]0\,;+\infty[$

En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, donc par produit :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$: on écrit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

RÉPONSE

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.b. Interprétation graphique

RÉPONSE

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$; la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. Démonstration de $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$

On dérive le quotient $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$, $v(x) = x^2$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x\big(1-2\ln(x)\big)}{x^4} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}.$$

RÉPONSE

Pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. Tableau de variation de f

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$. Or :

$$1 - 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

La valeur extrémale est atteinte en $x = \sqrt{\mathrm{e}}$:

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

RÉPONSE

f est strictement croissante sur $\left]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$. Elle admet un maximum en $x=\sqrt{\mathrm{e}}$, égal à $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

4. Équation réduite de la tangente Δ en A d'abscisse 1

$$f(1)=\frac{\ln(1)}{1^2}=0,\qquad f'(1)=\frac{1-2\ln(1)}{1^3}=1.$$

L'équation de la tangente est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$:

RÉPONSE

$\Delta :\ y=x-1.$

5. Vérification de $f''(x)=\dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$

On dérive $f'(x)=\dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$ comme un quotient avec $u(x)=1-2\ln(x)$, $v(x)=x^3$, $u'(x)=-\dfrac{2}{x}$, $v'(x)=3x^2$:

$$f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}\times x^3-\big(1-2\ln(x)\big)\times 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{-2x^2-3x^2\big(1-2\ln(x)\big)}{x^6}=\frac{-2-3+6\ln(x)}{x^4}.$$

RÉPONSE

Pour tout réel $x>0$: $f''(x)=\dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6.a. Convexité de f et point d'inflexion

Pour $x>0$, $x^4>0$: le signe de $f''(x)$ est celui de $-5+6\ln(x)$. Or :

$$-5+6\ln(x)>0\iff\ln(x)>\frac{5}{6}\iff x>\mathrm{e}^{5/6}.$$

Ainsi $f''<0$ sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right[$ et $f''>0$ sur $\left]\mathrm{e}^{5/6}\,;+\infty\right[$; f'' s'annule en changeant de signe en $x=\mathrm{e}^{5/6}$.

$$f\left(\mathrm{e}^{5/6}\right)=\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{5/6}\right)}{\left(\mathrm{e}^{5/6}\right)^2}=\frac{5}{6}\,\mathrm{e}^{-5/3}.$$

RÉPONSE

f est **concave** sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right]$ et **convexe** sur $\left[\mathrm{e}^{5/6}\,;+\infty\right[$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{5/6}\,;\,\dfrac{5}{6}\,\mathrm{e}^{-5/3}\right)$.

6.b. Pour tout $x\in\left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right]$, $x-1\geqslant\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

MÉTHODE
Sur un intervalle où elle est concave, une fonction reste *en dessous* de chacune de ses tangentes.

Sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right]$, f est concave (question 6.a) et $1 \in \left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right]$ car $\mathrm{e}^{5/6} > 1$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située sous sa tangente Δ au point A d'abscisse 1, dont l'équation est $y = x - 1$. Autrement dit, pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leqslant x - 1$.

RÉPONSE
Pour tout $x \in \left]0\,;\mathrm{e}^{5/6}\right]$: $x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

7. Pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{5/6}\,;+\infty\right[$, on a aussi $x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

MÉTHODE
Sur cet intervalle, la tangente Δ ne suffit plus (la courbe est convexe) : on majore directement f par son maximum.

D'après la question 3, pour tout $x > 0$ on a $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x - 1$ est croissante, donc pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{5/6}$:

$$x - 1 \geqslant \mathrm{e}^{5/6} - 1.$$

Or $\mathrm{e}^{5/6} - 1 \approx 1{,}30$ et $\dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 0{,}18$, donc $\mathrm{e}^{5/6} - 1 > \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. On en déduit, pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{5/6}$:

$$x - 1 \geqslant \mathrm{e}^{5/6} - 1 > \frac{1}{2\mathrm{e}} \geqslant f(x).$$

RÉPONSE
Pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{5/6}\,;+\infty\right[$: $x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
(Combinée à la question 6.b, l'inégalité est donc vraie sur tout $]0\,;+\infty[$.)

Partie B

1. Interprétation graphique de I_n
Pour $x \geqslant 1$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x^2 > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;n]$.

RÉPONSE
I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. La suite (I_n) est croissante
Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sur $[n\,;n+1]$ (avec $n \geqslant 1$), $f(x) \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

RÉPONSE
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_{n+1} \geqslant I_n$: la suite (I_n) est **croissante**.

3. Script Python complété

MÉTHODE

La courbe atteint son maximum $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ en $\sqrt{\mathrm{e}} \in [1\,;2]$, puis décroît. Sur chaque intervalle $[i\,;i+1]$ avec $i \geqslant 2$, le maximum de f est donc atteint à gauche, en $x = i$, et vaut $f(i) = \dfrac{\ln(i)}{i^2}$. La somme des aires des 9 rectangles de largeur 1 (initialisée par celui de $[1\,;2]$, de hauteur $\frac{1}{2\mathrm{e}}$) approche $\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

RÉPONSE

```
from math import *
S = 1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S = S + log(i)/i**2
print(S)
```

4. Calcul de I_n par intégration par parties

MÉTHODE

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n - \int_1^n \left(-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$I_n = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n.$$

On calcule chaque crochet :

$$\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1)}{1} = -\frac{\ln(n)}{n}, \qquad \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{1}{n} + 1.$$

D'où :

$$I_n = -\frac{\ln(n)}{n} + 1 - \frac{1}{n} = \frac{-\ln(n) + n - 1}{n} = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}.$$

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \dfrac{n - 1 - \ln(n)}{n}$.

5. Limite de la suite (I_n)

$$I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}.$$

Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0$ et, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(n)}{n} \to 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1 - 0 - 0 = 1.$$

RÉPONSE

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1.$