

Corrigé détaillé

Exercice 1 · 9 pts · Exercice 2 · 6 pts · Exercice 3 · 5 pts · 3h30

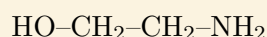
Thèmes : Valorisation du CO_2 · Effet photoélectrique · Lancer franc (mécanique)

Exercice 1 : Valorisation du dioxyde de carbone dans les cimenteries (9 points)

Thème : captage du CO₂ par l'éthanolamine, contrôle qualité, production de méthanolPartie 1 — Captage de la molécule de CO₂ par l'éthanolamine

Q.1. Formule topologique de l'éthanolamine — groupes caractéristiques. (1 pt)

RÉPONSE Q.1

La molécule d'éthanolamine (C₂H₇NO) possède deux groupes caractéristiques :

Groupe	Notation	Famille fonctionnelle
Hydroxyle	–OH	Alcool
Amine primaire	–NH ₂	Amine

Q.2. Vérification de la concentration $C = 3,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour une solution à 20 % en masse. (1 pt)

MÉTHODE — Calcul de concentration à partir du titre massique

Pour une solution de densité d et de titre massique t :

$$C = \frac{t \times d \times \rho_{\text{eau}}}{M}$$

avec $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = 1000 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

RÉPONSE Q.2

Données : $t = 0,20$, $d = 1,0$, $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, $M(\text{C}_2\text{H}_7\text{NO}) = 61,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Pour 1 L de solution :

$$m_{\text{solution}} = d \times \rho_{\text{eau}} \times V = 1,0 \times 1000 \times 1 = 1000 \text{ g}$$

$$m_{\text{éthanolamine}} = t \times m_{\text{solution}} = 0,20 \times 1000 = 200 \text{ g}$$

$$C = \frac{n}{V} = \frac{m_{\text{éthanolamine}}}{M \times V} = \frac{200}{61,0 \times 1} \approx 3,28 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \approx 3,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La valeur $C = 3,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est bien vérifiée. ✓

Q.3. Diagramme de prédominance du couple acide-base de l'éthanolamine. (1 pt)

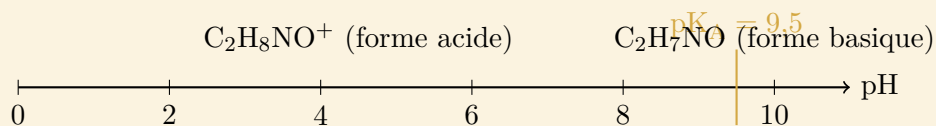
RAPPEL — Diagramme de prédominance

Pour un couple AH/A[−] de pK_A donné :

- Si pH < pK_A : la forme acide AH prédomine.
- Si pH > pK_A : la forme basique A[−] prédomine.

RÉPONSE Q.3

Le couple est $\text{C}_2\text{H}_8\text{NO}^+(\text{aq}) / \text{C}_2\text{H}_7\text{NO}(\text{aq})$ avec $\text{pK}_\text{A} = 9,5$.



Q.4. Forme prédominante de l'éthanolamine pour $\text{pH} = 11$. (1 pt)

RÉPONSE Q.4

Le pH de la solution est 11 et $\text{pK}_\text{A} = 9,5$.

Puisque $\text{pH} = 11 > \text{pK}_\text{A} = 9,5$, l'éthanolamine se trouve sous sa forme basique $\text{C}_2\text{H}_7\text{NO}$.

Q.5. Expression du taux d'avancement τ . (1 pt)

RÉPONSE Q.5

Le taux d'avancement d'une réaction est défini comme le rapport de l'avancement final sur l'avancement maximal :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\text{max}}}$$

$\tau \in [0; 1]$: si $\tau = 1$ la réaction est totale, si $\tau \ll 1$ la transformation est très peu avancée.

Q.6. Expression de x_{max} en fonction de C et V . (1 pt)

RÉPONSE Q.6

La réaction est : $\text{C}_2\text{H}_7\text{NO}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\ell) \longrightarrow \text{C}_2\text{H}_8\text{NO}^+(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq})$

Tableau d'avancement (l'eau est en grand excès, réactif limitant = éthanolamine) :

État	$\text{C}_2\text{H}_7\text{NO}$	H_2O	$\text{C}_2\text{H}_8\text{NO}^+$	HO^-
Initial	$C \cdot V$	excès	0	0
En cours	$C \cdot V - x$	excès	x	x
Final	$C \cdot V - x_f$	excès	x_f	x_f

L'avancement maximal correspond à l'épuisement total de l'éthanolamine :

$$C \cdot V - x_{\text{max}} = 0 \implies x_{\text{max}} = C \cdot V$$

Q.7. Démonstration de $\tau = \frac{K_e \cdot c^\circ}{C \cdot 10^{-\text{pH}}}$. (2 pts)

RÉPONSE Q.7

À l'état final, les concentrations des espèces en solution sont :

$$[\text{HO}^-] = \frac{x_f}{V}, \quad [\text{C}_2\text{H}_8\text{NO}^+] = \frac{x_f}{V}, \quad [\text{C}_2\text{H}_7\text{NO}] = C - \frac{x_f}{V}$$

Étape 1 — Expression de $[\text{HO}^-]$ en fonction du pH .

D'après la relation produit ionique de l'eau :

$$K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]}{(c^\circ)^2} \Rightarrow [\text{HO}^-] = \frac{K_e \cdot (c^\circ)^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$$

Or $[\text{H}_3\text{O}^+] = c^\circ \cdot 10^{-\text{pH}}$, donc :

$$[\text{HO}^-] = \frac{K_e \cdot (c^\circ)^2}{c^\circ \cdot 10^{-\text{pH}}} = \frac{K_e \cdot c^\circ}{10^{-\text{pH}}} = K_e \cdot c^\circ \cdot 10^{\text{pH}}$$

Étape 2 — Expression de x_f .

$$x_f = [\text{HO}^-] \cdot V = \frac{K_e \cdot c^\circ \cdot V}{10^{-\text{pH}}}$$

Étape 3 — Expression de τ .

$$\tau = \frac{x_f}{x_{\text{max}}} = \frac{K_e \cdot c^\circ \cdot V \cdot 10^{\text{pH}}}{C \cdot V} = \frac{K_e \cdot c^\circ \cdot 10^{\text{pH}}}{C} = \frac{K_e \cdot c^\circ}{C \cdot 10^{-\text{pH}}}$$

La relation est bien démontrée. ✓

Q.8. Calcul de τ et commentaire.

(1 pt)

RÉPONSE Q.8

Données : $K_e = 1,0 \times 10^{-14}$, $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $C = 3,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $\text{pH} = 11$.

$$\tau = \frac{K_e \cdot c^\circ}{C \cdot 10^{-\text{pH}}} = \frac{1,0 \times 10^{-14} \times 1}{3,3 \times 10^{-11}} = \frac{10^{-14}}{3,3 \times 10^{-11}} \approx 3,0 \times 10^{-4}$$

Commentaire : $\tau \approx 3,0 \times 10^{-4} \ll 1$. Le taux d'avancement est très faible : seulement 0,03 % des molécules d'éthanolamine ont réagi. Cela confirme que l'éthanolamine est une base très faible, cohérent avec un pKA élevé (9,5).

Q.9. Identification d'un intermédiaire réactionnel.

(1 pt)

RAPPEL — Intermédiaire réactionnel

Un intermédiaire réactionnel est une espèce chimique qui est produite au cours d'une étape du mécanisme et consommée lors d'une étape ultérieure : elle n'apparaît ni dans les réactifs initiaux ni dans les produits finaux.

RÉPONSE Q.9

En comparant les deux étapes du mécanisme :

- À la fin de l'étape 1, on obtient le composé $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{N}^+\text{H}(\text{H})-\text{C}(=\text{O}^-)$ (portant une charge positive sur l'azote et une charge négative sur l'oxygène du carboxylate) : c'est un zwitterion (carbamate zwitterionique).
- Ce même composé est le réactif de l'étape 2, où il perd un proton H^+ pour donner le carbamate final $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{NH}-\text{COO}^-$.

Le composé $\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{N}^+\text{H}(\text{H})-\text{COO}^-$ (zwitterion) est donc l'intermédiaire réactionnel : il est formé à la fin de l'étape 1 et consommé au cours de l'étape 2.

Q.10. Déplacement d'électrons à l'étape 1 et justification.

(1 pt)

CHIMIE ORGANIQUE — Flèches courbes

Une flèche courbe représente le déplacement d'un doublet électronique d'une zone riche (doublet non liant ou liaison) vers une zone appauvrie (atome électrophile ou liaison polaire).

RÉPONSE Q.10

À l'étape 1, l'éthanolamine (nucléophile) attaque le CO_2 (électrophile) :

1. Flèche 1 : Le doublet non liant de l'azote N de l'éthanolamine se déplace vers le carbone du CO_2 (atome électrophile, porteur d'une charge partielle positive $\delta+$). Cette flèche part du doublet de N et arrive sur le carbone.
2. Flèche 2 : Simultanément, le doublet de la liaison $\text{C}=\text{O}$ du CO_2 se déplace vers l'un des oxygènes (qui acquiert une charge négative O^-). Cette flèche part de la liaison $\text{C}=\text{O}$ et arrive sur l'oxygène.

Justification des sens : L'azote est riche en électrons (doublet non liant), tandis que le carbone de CO_2 est appauvri (deux liaisons avec des oxygènes électronégatifs). Le déplacement électronique va donc des zones riches vers les zones pauvres.

Partie 2 — Contrôle qualité d'une solution d'éthanolamine

Q.11. Choix du matériel pour préparer 250,0 mL de S_{50} à partir de S .

(1 pt)

RÉPONSE Q.11

La solution S_{50} est obtenue en diluant S 50 fois :

$$V_S = \frac{V_{S_{50}}}{\text{facteur de dilution}} = \frac{250,0}{50} = 5,0 \text{ mL}$$

Matériel choisi :

- Pipette jaugée de 5,0 mL : pour prélever précisément 5,0 mL de la solution S (la pipette jaugée garantit une précision maximale sur le volume prélevé).
- Fiole jaugée de 250,0 mL : pour compléter jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée (la fiole jaugée garantit un volume final précis de 250,0 mL).

Les béchers, pipettes graduées et éprouvettes ne sont pas assez précis pour une préparation quantitative.

Q.12. Définir l'équivalence d'un titrage.

(1 pt)

RÉPONSE Q.12

L'équivalence d'un titrage est le point au cours duquel les réactifs titrant et titré ont été introduits dans les proportions stoechiométriques de la réaction de titrage. À l'équivalence, ni le titrant ni le titré ne sont en excès : ils ont tous deux été entièrement consommés (la réaction est supposée totale).

Q.13. Détermination de V_E à partir de la courbe de titrage.

(1 pt)

MÉTHODE — Lecture du volume équivalent

Sur une courbe de suivi pH-métrique, le volume équivalent V_E correspond au point d'inflexion de la courbe $\text{pH} = f(V)$, c'est-à-dire au minimum de la courbe dérivée $d(\text{pH})/dV = f'(V)$.

RÉPONSE Q.13

D'après la figure 1, la courbe dérivée $d(\text{pH})/dV$ présente un minimum (valeur la plus négative, environ -3) pour un volume de solution titrante d'environ :

$$V_E \approx 14,5 \text{ mL}$$

Cette méthode de la dérivée permet une détermination plus précise que la simple identification du point d'inflexion sur la courbe $\text{pH} = f(V)$.

Q.14. Déduction du titre massique en éthanolamine de la solution S .

(2 pts)

RÉPONSE Q.14

La réaction de titrage est : $\text{C}_2\text{H}_7\text{NO} (\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+ (\text{aq}) \longrightarrow \text{C}_2\text{H}_8\text{NO}^+ (\text{aq}) + \text{H}_2\text{O} (\ell)$
 Stoechiométrie 1:1, donc à l'équivalence : $n_{\text{éthanolamine}} = n_{\text{H}_3\text{O}^+}$.

Étape 1 — Quantité de matière d'éthanolamine dans V_B de S_{50} :

$$n_{\text{éthanolamine}} = C_A \times V_E = 0,10 \times 14,5 \times 10^{-3} = 1,45 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

Étape 2 — Concentration de S_{50} :

$$C_{50} = \frac{n_{\text{éthanolamine}}}{V_B} = \frac{1,45 \times 10^{-3}}{25,0 \times 10^{-3}} = 5,8 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Étape 3 — Concentration de S (facteur de dilution = 50) :

$$C_S = 50 \times C_{50} = 50 \times 5,8 \times 10^{-2} = 2,9 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Étape 4 — Titre massique :

$$m_{\text{éthanolamine}} = C_S \times M \times V = 2,9 \times 61,0 \times 1 = 176,9 \text{ g pour 1 L}$$

$$m_{\text{solution}} = d \times \rho_{\text{eau}} \times V = 1,0 \times 1000 \times 1 = 1000 \text{ g}$$

$$t_m = \frac{m_{\text{éthanolamine}}}{m_{\text{solution}}} \times 100 = \frac{176,9}{1000} \times 100 \approx 17,7 \% \approx 18 \%$$

Q.15. Commentaire et possibilité d'utiliser cette solution.

(1 pt)

RÉPONSE Q.15

Le titre massique trouvé est d'environ 18 %, ce qui place la solution S entre les valeurs 15 % et 20 % du tableau.

	15 %	≈ 18 %	20 %	25 %
Efficacité captation	Faible	intermédiaire	Bonne	Bonne à très bonne
Tolérance corrosion	Très bonne	acceptable	Acceptable	Risques accrus

À 18 %, la solution présente une efficacité de captation légèrement en dessous du niveau « Bonne » obtenu à 20 %. La tolérance à la corrosion reste correcte.

Conclusion : La solution S pourrait être utilisée pour le captage, mais ses performances seraient légèrement inférieures à la concentration optimale de 20 %. Il serait préférable de la concentrer jusqu'à 20 % pour obtenir une efficacité « Bonne » tout en maintenant la corrosion à un niveau acceptable.

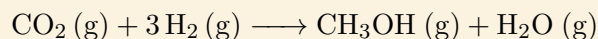
Partie 3 — Production de méthanol à partir du CO₂ capté

Q.16. Équation de la réaction de formation du méthanol.

(1 pt)

RÉPONSE Q.16

Le méthanol (CH₃OH) est formé par réaction entre le CO₂ et H₂, avec production d'eau :



Vérification :

- Carbone : 1 à gauche, 1 à droite ✓
- Oxygène : 2 à gauche, 1 + 1 = 2 à droite ✓
- Hydrogène : 6 à gauche, 4 + 2 = 6 à droite ✓

Q.17. Durée nécessaire à la production des 37 500 tonnes de H₂.

(2 pts)

MÉTHODE — Puissance, énergie et durée

$$E = P \times \Delta t \implies \Delta t = \frac{E}{P}$$

Attention aux unités : si E est en kW·h et P en kW, alors Δt est en heures.

RÉPONSE Q.17

Données :

- Masse de H₂ à produire : $m = 37\,500 \text{ t} = 37\,500 \times 10^3 \text{ kg} = 3,75 \times 10^7 \text{ kg}$
- Énergie par kg de H₂ : $e = 55 \text{ kWh} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Puissance totale des électrolyseurs : $P = 330 \text{ MW} = 330 \times 10^3 \text{ kW}$

Calcul de l'énergie totale nécessaire :

$$E = m \times e = 3,75 \times 10^7 \times 55 = 2,0625 \times 10^9 \text{ kWh}$$

Calcul de la durée :

$$\Delta t = \frac{E}{P} = \frac{2,0625 \times 10^9}{330 \times 10^3} = 6250 \text{ h}$$

La production des 37 500 t de dihydrogène nécessite 6250 heures de fonctionnement des électrolyseurs.

Q.18. La puissance des électrolyseurs est-elle suffisante ?

(1 pt)

RÉPONSE Q.18

Le projet vise à produire 200 000 t de méthanol par an, ce qui nécessite 37 500 t de H₂.

Il y a $365 \times 24 = 8760 \text{ h}$ dans une année.

La durée nécessaire est 6250 h, soit :

$$\frac{6250}{8760} \approx 71 \% \text{ de l'année}$$

Puisque $6250 \text{ h} < 8760 \text{ h}$, les électrolyseurs disposent de suffisamment de temps en une année pour produire les 37 500 t requises.

Conclusion : Oui, la puissance de 330 MW est suffisante. Les électrolyseurs peuvent fonctionner à pleine puissance pendant environ 71 % de l'année pour atteindre l'objectif de production, laissant une marge pour la maintenance.

Exercice 2 : L'effet photoélectrique et ses applications (6 points)

Thème : effet photoélectrique du zinc — panneau photovoltaïque

Partie 1 — Une approche historique de l'effet photoélectrique

Q.1. Description de l'effet photoélectrique.

(1 pt)

RÉPONSE Q.1

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal éclairé par un rayonnement lumineux. Ce phénomène présente les caractéristiques suivantes :

- L'émission n'a lieu que si la fréquence de la radiation est supérieure ou égale à une fréquence minimale appelée fréquence seuil ν_s .
- En dessous de ν_s , aucun électron n'est émis, quelle que soit l'intensité lumineuse.
- Au-dessus de ν_s , le nombre d'électrons émis dépend de l'intensité, mais leur énergie cinétique dépend uniquement de la fréquence.

Ce phénomène s'explique par le modèle corpusculaire de la lumière : chaque photon cède son énergie $E = h\nu$ à un électron du métal.

Q.2. Calcul de la fréquence seuil ν_s du zinc.

(1 pt)

RAPPEL — Condition d'émission photoélectrique

L'émission d'un électron nécessite que l'énergie du photon soit au moins égale au travail d'extraction :

$$E_{\text{photon}} \geq W_{\text{ext}} \implies h\nu \geq W_{\text{ext}}$$

À la fréquence seuil, $h\nu_s = W_{\text{ext}}$.

RÉPONSE Q.2

Données : $W_{\text{ext}}(\text{Zn}) = 4,3 \text{ eV} = 4,3 \times 1,60 \times 10^{-19} \text{ J} = 6,88 \times 10^{-19} \text{ J}$, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$.

À la fréquence seuil : $h\nu_s = W_{\text{ext}}$, donc :

$$\nu_s = \frac{W_{\text{ext}}}{h} = \frac{6,88 \times 10^{-19}}{6,63 \times 10^{-34}} \approx 1,04 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Q.3. Longueur d'onde seuil et domaine du spectre.

(1 pt)

RÉPONSE Q.3

$$\lambda_s = \frac{c}{\nu_s} = \frac{3,00 \times 10^8}{1,04 \times 10^{15}} \approx 2,88 \times 10^{-7} \text{ m} = 288 \text{ nm}$$

Cette longueur d'onde de $\approx 288 \text{ nm}$ se situe dans le domaine des ultraviolets (UV), dont la plage s'étend de 10 nm à 400 nm .

Q.4. Justification que l'effet photoélectrique se produit pour $\lambda = 250 \text{ nm}$.

(1 pt)

RÉPONSE Q.4

On calcule la fréquence de la radiation incidente :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \times 10^8}{250 \times 10^{-9}} = 1,20 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Comme $\nu = 1,20 \times 10^{15} \text{ Hz} > \nu_s = 1,04 \times 10^{15} \text{ Hz}$,

ou de façon équivalente $\lambda = 250 \text{ nm} < \lambda_s = 288 \text{ nm}$,
l'effet photoélectrique se produit bien car la fréquence de la radiation est supérieure à la fréquence seuil du zinc.

Q.5. Démonstration de $v = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu_s)}{m_e}}$. (1 pt)

RÉPONSE Q.5

Bilan d'énergie : L'énergie du photon incident est utilisée pour :

1. Arracher l'électron du métal (travail d'extraction $W_{\text{ext}} = h\nu_s$) ;
2. Communiquer à l'électron éjecté une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2$.

$$E_{\text{photon}} = W_{\text{ext}} + E_c$$

$$h\nu = h\nu_s + \frac{1}{2}m_e v^2$$

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h(\nu - \nu_s)$$

$$v^2 = \frac{2h(\nu - \nu_s)}{m_e}$$

$$v = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu_s)}{m_e}}$$

Q.6. Calcul de la vitesse d'éjection. (1 pt)

RÉPONSE Q.6

Données : $\nu = 1,20 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $\nu_s = 1,04 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$, $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

$$\nu - \nu_s = (1,20 - 1,04) \times 10^{15} = 1,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 6,63 \times 10^{-34} \times 1,6 \times 10^{14}}{9,11 \times 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{2,12 \times 10^{-19}}{9,11 \times 10^{-31}}} = \sqrt{2,33 \times 10^{11}}$$

$$v \approx 4,8 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Q.7. Paramètre influençant la vitesse — sens de modification. (1 pt)

RÉPONSE Q.7

D'après l'expression $v = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu_s)}{m_e}}$, la vitesse dépend de la fréquence ν de la radiation (ou de façon équivalente de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$).

Puisque v est une fonction croissante de $(\nu - \nu_s)$, pour augmenter la vitesse d'éjection, il faut augmenter la fréquence ν , c'est-à-dire diminuer la longueur d'onde λ de la radiation.

Remarque : l'intensité lumineuse n'influence pas la vitesse des électrons éjectés — elle détermine seulement le nombre d'électrons émis.

Partie 2 — Étude d'un panneau photovoltaïque

Q.8. Rendement du panneau pour $E = 800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. (2 pts)

MÉTHODE — Rendement d'un convertisseur

$$\eta = \frac{P_{\text{élec max}}}{P_{\text{lum}}} = \frac{P_{\text{élec max}}}{E \times S}$$

On lit $P_{\text{élec max}}$ au sommet de la courbe de puissance à l'éclairement donné.

RÉPONSE Q.8

Surface du panneau :

$$S = 1,346 \times 1,112 = 1,497 \text{ m}^2 \approx 1,50 \text{ m}^2$$

Puissance lumineuse reçue pour $E = 800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$:

$$P_{\text{lum}} = E \times S = 800 \times 1,50 = 1200 \text{ W}$$

Puissance électrique maximale (lecture graphique à $800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) :

D'après la figure 2, le maximum de la courbe de puissance à $E = 800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ vaut environ $P_{\text{max}} \approx 140 \text{ W}$ (atteint vers $U \approx 26 \text{ V}$).

Rendement :

$$\eta = \frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{lum}}} = \frac{140}{1200} \approx 0,117 \approx 11,7 \%$$

Le rendement est d'environ 11,7 % dans les conditions optimales à $800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Q.9. Nombre de panneaux à installer.

(2 pts)

RÉPONSE Q.9

Données :

- Consommation annuelle : 7500 kWh ; part à couvrir : $7500/2 = 3750 \text{ kWh}$
- Énergie surfacique journalière reçue : $4,1 \text{ kWh} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{j}^{-1}$
- Rendement moyen annuel par panneau : $\eta = 10 \% = 0,10$
- Surface d'un panneau : $S \approx 1,50 \text{ m}^2$

Étape 1 — Énergie surfacique annuelle reçue :

$$e_{\text{an}} = 4,1 \times 365 = 1496,5 \text{ kWh} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$$

Étape 2 — Énergie électrique produite par m^2 par an :

$$e_{\text{élec}} = \eta \times e_{\text{an}} = 0,10 \times 1496,5 = 149,65 \text{ kWh} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{an}^{-1}$$

Étape 3 — Énergie produite par panneau par an :

$$E_{\text{panneau}} = e_{\text{élec}} \times S = 149,65 \times 1,50 \approx 224 \text{ kWh} \cdot \text{an}^{-1}$$

Étape 4 — Nombre de panneaux :

$$N = \frac{E_{\text{besoin}}}{E_{\text{panneau}}} = \frac{3750}{224} \approx 16,7$$

Puisqu'on ne peut pas avoir un nombre fractionnaire de panneaux, il faut arrondir à l'entier supérieur :

$$N = 17 \text{ panneaux}$$

Commentaire : 17 panneaux produiraient $17 \times 224 \approx 3808 \text{ kWh} \cdot \text{an}^{-1}$, soit légèrement plus que les 3750 kWh souhaités. Cela représente une surface totale d'environ $17 \times 1,50 = 25,5 \text{ m}^2$ de toiture, ce qui est réalisable sur une maison individuelle.

Exercice 3 : La Wemba-mania (5 points)

Thème : mécanique du point — tir parabolique — lancer franc de basket

RAPPEL — Équations du mouvement en chute libre

Pour un projectile soumis uniquement à son poids, dans le repère $(O; x, y)$ avec l'axe y vers le haut :

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a_y &= -g \\ v_x(t) &= v_{x0}, & v_y(t) &= -gt + v_{y0} \\ x(t) &= v_{x0}t + x_0, & y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 \end{aligned}$$

Q.1. Nature du mouvement selon l'axe Ox .

(1 pt)

RÉPONSE Q.1

D'après la figure 2, la modélisation de la coordonnée x du ballon en fonction du temps est :

$$x(t) = 4,0 \times t$$

Cette relation est linéaire (affine de pente constante), ce qui signifie que $v_x = \text{cste} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Conclusion : Le mouvement du ballon selon l'axe Ox est rectiligne uniforme (vitesse horizontale constante). Ceci est cohérent avec l'absence de force horizontale (le seul effort appliqué est le poids, vertical).

Q.2. Valeur de v_x .

(0,5 pt, 5 > 1 s)

RÉPONSE Q.2

D'après la modélisation $x = 4,0 \times t$, le coefficient directeur représente la vitesse horizontale :

$$v_x = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q.3. Valeur de v_{y0} .

(0,5 pt, 5 > 1 s)

RÉPONSE Q.3

La modélisation de la figure 3 donne $V_y(t) = -9,7 \times t + 5,0$.

La valeur initiale (en $t = 0$) est l'ordonnée à l'origine de cette droite :

$$v_{y0} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q.4. Vitesse initiale v_0 et angle α avec l'horizontale.

(1 pt)

RÉPONSE Q.4

Le vecteur vitesse initial a pour composantes $v_x = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{y0} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{4,0^2 + 5,0^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{5,0}{4,0} = 1,25 \implies \alpha = \arctan(1,25) \approx 51^\circ$$

La balle est lancée avec une vitesse initiale de $6,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 51° au-dessus de l'horizontale.

Q.5. Coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération.

(0,5 pt, 5 > 1 s)

RÉPONSE Q.5

Application de la deuxième loi de Newton :

Le ballon est uniquement soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (avec \vec{g} dirigé vers le bas, selon $-\vec{y}$).

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \implies \vec{a} = \vec{g}$$

Donc :

$$a_x(t) = 0 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad a_y(t) = -g = -9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

Vérification avec la figure 3 : le coefficient directeur de $V_y(t)$ est $-9,7 \text{ m.s}^{-2} \approx -g$. ✓

Q.6. Démonstration des équations temporelles des coordonnées du ballon.

(1 pt)

RÉPONSE Q.6

Les conditions initiales sont : $x_0 = 0$, $y_0 = h = 3,05 \text{ m}$, $v_{x0} = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$, $v_{y0} = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$.

On utilise $a_y \approx -9,8 \text{ m.s}^{-2}$ (valeur issue du graphique).

Coordonnée $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{x0} t + x_0 = 0 + 4,0 \times t + 0 \implies x(t) = 4,0 \times t$$

Coordonnée $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y0} t + y_0 = \frac{1}{2} \times (-9,8) \times t^2 + 5,0 \times t + 3,05$$

$$\implies y(t) = -4,9 \times t^2 + 5,0 \times t + 3,05$$

Ces expressions sont bien identiques aux équations données dans l'énoncé. ✓

Q.7. Démonstration de la trajectoire $y = -0,31x^2 + 1,3x + 3,05$.

(0,5 pt, 5 > 1 s)

RÉPONSE Q.7

La trajectoire est la courbe $y = f(x)$, obtenue en éliminant le paramètre t .

De $x(t) = 4,0t$, on tire $t = \frac{x}{4,0}$.

On substitue dans $y(t)$:

$$y = -4,9 \left(\frac{x}{4,0} \right)^2 + 5,0 \times \frac{x}{4,0} + 3,05$$

$$y = -\frac{4,9}{16}x^2 + \frac{5,0}{4,0}x + 3,05$$

$$y = -0,306x^2 + 1,25x + 3,05$$

$$y \approx -0,31x^2 + 1,3x + 3,05$$

Ce résultat est bien conforme à l'équation de trajectoire donnée dans l'énoncé. ✓

Q.8. Le lancer franc est-il réussi sans toucher le cercle métallique ?

(1,5 pt)

MÉTHODE — Condition de réussite du lancer

Pour que le ballon passe dans le panier sans toucher le cercle métallique, il faut que le centre G du ballon passe à moins de $(R_{\text{panier}} - r_{\text{ballon}})$ du centre du cerceau, dans le plan horizontal du

cerceau ($y = h$).

$$|x_G - x_{\text{panier}}| \leq R_{\text{panier}} - r_{\text{ballon}}$$

RÉPONSE Q.8

Données : $d_{\text{ballon}} = 25 \text{ cm} \Rightarrow r_{\text{ballon}} = 0,125 \text{ m}$; $D_{\text{panier}} = 0,45 \text{ m} \Rightarrow R_{\text{panier}} = 0,225 \text{ m}$; centre du panier à $x_{\text{panier}} = 4,2 \text{ m}$, $y = h = 3,05 \text{ m}$.

Étape 1 — Position horizontale du ballon quand $y = 3,05 \text{ m}$:

On résout $y(x) = 3,05$:

$$-0,31x^2 + 1,3x + 3,05 = 3,05$$

$$x(-0,31x + 1,3) = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{position de départ}) \quad \text{ou} \quad x = \frac{1,3}{0,31} \approx 4,19 \text{ m}$$

Le ballon atteint la hauteur du cerceau en $x \approx 4,19 \text{ m}$.

Étape 2 — Vérification que le ballon descend en passant par le cerceau :

À $t = x/v_x = 4,19/4,0 = 1,05 \text{ s}$:

$$v_y = -9,7 \times 1,05 + 5,0 = -10,2 + 5,0 = -5,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < 0$$

Le ballon est bien en phase descendante lors du passage. ✓

Étape 3 — Condition pour ne pas toucher le cercle :

La marge admissible est :

$$R_{\text{panier}} - r_{\text{ballon}} = 0,225 - 0,125 = 0,10 \text{ m}$$

L'écart entre la position du centre du ballon et le centre du panier :

$$|x_G - x_{\text{panier}}| = |4,19 - 4,20| = 0,01 \text{ m}$$

Grandeur	Valeur calculée	Marge autorisée
$ x_G - x_{\text{panier}} $	0,01 m	$\leq 0,10 \text{ m}$
Condition satisfaite ?	OUI (0,01 < 0,10)	✓

Conclusion : Le lancer franc est réussi. Le centre du ballon passe à seulement 0,01 m du centre du cerceau (soit à $0,01 \text{ m} \ll 0,10 \text{ m}$), bien à l'intérieur de la fenêtre permise pour que le ballon passe sans toucher le cercle métallique.