Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2 — Sujet 26-MATJ2JA1

Asie

Exercice 1 — Fonction homographique et suite

(5 pts)

RAPPEL DE COURS

f est définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-3}$. La suite (u_n) vérifie $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n-3}=f(u_n)$.

Partie A

1. Justification des éléments du tableau de variation

Dérivée. f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On dérive le quotient :

$$f'(x)=\frac{(x-2)'(2x-3)-(x-2)(2x-3)'}{(2x-3)^2}=\frac{(2x-3)-2(x-2)}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2}=\frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Pour tout $x\neq\frac{3}{2}$, $(2x-3)^2>0$, donc $f'(x)>0$: f est **strictement croissante** sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$.

Limites. En $-\infty$, f est le quotient de deux polynômes de degré 1 :

$$f(x)=\frac{x-2}{2x-3}=\frac{1-\frac{2}{x}}{2-\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=1 \text{ par somme et } \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2 \text{ par somme.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{2} \text{ par quotient.}$$

Étudions la limite en $\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}(2x-3)=0^- \text{ et } \lim_{x\to\frac{3}{2}^-}(x-2)=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}f(x)=+\infty \text{ par quotient.}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	‖
f	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖

RÉPONSE

f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$; elle passe de la valeur limite $\dfrac{1}{2}$ (en $-\infty$) à $+\infty$ (en $\frac{3}{2}^-$).

2. Montrons quepour tout $x \in [0\,;1]$**,** $f(x) \in [0\,;1]$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

par croissance de la fonction f sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$. De plus :

$$f(0) = \frac{0-2}{0-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}, \qquad f(1) = \frac{1-2}{2-3} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ainsi $\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, et comme $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$ est inclus dans $[0\,;1]$:

RÉPONSE

Pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.

Partie B

1. Démonstration par récurrence :
On note $P(n)$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- *Initialisation.* $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \dfrac{2}{3}$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$: $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Supposons $P(n)$ vraie pour un entier naturel n, soit $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme f est croissante sur $[0\,;1]$ et que ces trois nombres appartiennent à $[0\,;1]$, on applique f en conservant l'ordre :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1), \quad \text{c.-à-d.} \quad \frac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1.$$

  Comme $\dfrac{2}{3} \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$: $P(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. Convergence de la suite (u_n)
L'encadrement précédent montre que $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n : la suite (u_n) est **croissante**. De plus elle est **majorée par** 1.

RÉPONSE

Toute suite croissante et majorée converge : la suite (u_n) **converge**.

3. Détermination de la limite l
On admet que l est solution de $f(x) = x$ sur $[0\,;1]$. Sur $[0\,;1]$, $2x-3 \neq 0$:

$$f(x) = x \iff \frac{x-2}{2x-3} = x \iff x-2 = x(2x-3) \iff x-2 = 2x^2-3x.$$

$$\iff 2x^2-4x+2 = 0 \iff x^2-2x+1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

La seule solution de $f(x) = x$ dans $[0\,;1]$ est $x = 1$.

RÉPONSE

Comme l est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[0\,;1]$, on a $l = 1$.

4. Interprétation de `seuil(0.0001) = 5000`

MÉTHODE

La boucle `while u<1-h` calcule les termes successifs de la suite (u_n) et s'arrête dès que $u_n \geqslant 1 - h$; la variable `n` compte le rang atteint.

L'appel `seuil(0.0001)` cherche le premier rang n tel que $u_n \geqslant 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$.

RÉPONSE

$n = 5000$ est le **plus petit rang** à partir duquel $u_n \geqslant 0{,}9999$: dès le rang 5000, les termes de la suite sont à moins de 10^{-4} de leur limite 1.

5.a. Calcul des quatre premiers termes sous forme de fractions irréductibles

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = f(0) = \frac{2}{3},$$

$$u_2 = f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} - 2}{2 \times \frac{2}{3} - 3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}, \qquad u_3 = f\left(\tfrac{4}{5}\right) = \frac{\frac{4}{5} - 2}{2 \times \frac{4}{5} - 3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7}.$$

RÉPONSE

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{4}{5}, \quad u_3 = \frac{6}{7}.$$

5.b. Conjecture et démonstration

Les numérateurs $0, 2, 4, 6$ valent $2n$ et les dénominateurs $1, 3, 5, 7$ valent $2n + 1$. On conjecture : pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

Démonstration par récurrence. On note $Q(n)$: $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

- *Initialisation.* $\dfrac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = \dfrac{0}{1} = 0 = u_0$: $Q(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Supposons $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$ pour un entier naturel n. Montrons que $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3}$.
  Ainsi :
  $$u_n - 2 = \frac{2n}{2n+1} - 2 = \frac{2n - 2(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n-2}{2n+1},$$
  $$2u_n - 3 = \frac{4n}{2n+1} - 3 = \frac{4n - 3(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n-3}{2n+1}.$$
  D'où :
  $$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} = \frac{\dfrac{-2n-2}{2n+1}}{\dfrac{-2n-3}{2n+1}} = \frac{-2n-2}{-2n-3} = \frac{2n+2}{2n+3}.$$
  $Q(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$. (On retrouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.)

Exercice 2 — Probabilités : lancers-francs

(5 pts)

Partie A

1. Loi suivie par X

On répète $n = 16$ fois, de manière indépendante et dans des conditions identiques, une même épreuve de Bernoulli à deux issues : « lancer réussi » (succès, de probabilité $p = 0{,}492$) ou « lancer manqué » (échec). La variable X compte le nombre de succès.

RÉPONSE

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0{,}492$: $X \sim \mathcal{B}(16\,;0{,}492)$.

2. Espérance de X

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$:

$$E(X) = 16 \times 0{,}492 = 7{,}872.$$

RÉPONSE

$E(X) = 7{,}872$. En moyenne, sur un grand nombre de matchs de 16 lancers-francs, ce joueur réussit environ $\mathbf{7{,}87}$ lancers-francs par match.

3. Calcul de $P(X = 5)$

$$P(X=5) = \binom{16}{5}\, 0{,}492^5\,(1-0{,}492)^{16-5} = 4368 \times 0{,}492^5 \times 0{,}508^{11}.$$

RÉPONSE

$P(X = 5) \approx 0{,}073$.

4. Probabilité de réussir au moins six lancers-francs

On cherche $P(X \geqslant 6)$. L'événement contraire est $\{X \leqslant 5\}$:

$$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5).$$

À la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}117$.
$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 1 - 0{,}117 \approx \mathbf{0{,}883}$.

RÉPONSE

La probabilité qu'un joueur réussisse au moins 6 lancers francs est de $0{,}883$.

Partie B

1. Valeurs prises par Y

Le joueur effectue 3 lancers ; Y compte le nombre de réussites.

RÉPONSE

Y prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

2. Expression de $P(Y=2)$

Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;p)$. Donc :

$$P(Y=2)=\binom{3}{2}p^2(1-p)^1=3p^2(1-p).$$

RÉPONSE

$P(Y=2)=3p^2(1-p)$.

3. Loi de probabilité de Y

Avec $Y\sim\mathcal{B}(3\,;p)$, $P(Y=k)=\binom{3}{k}p^k(1-p)^{3-k}$:

RÉPONSE

$P(Y=0)=(1-p)^3,\ \ P(Y=1)=3p(1-p)^2,\ \ P(Y=2)=3p^2(1-p),\ \ P(Y=3)=p^3.$

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

4. Démonstration de $P(Y\geqslant 2)=-2p^3+3p^2$

$$P(Y\geqslant 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=3p^2(1-p)+p^3=3p^2-3p^3+p^3=-2p^3+3p^2.$$

RÉPONSE

$P(Y\geqslant 2)=-2p^3+3p^2$.

5. Étude de $f(x)=-2x^3+3x^2$ sur $[0\,;1]$

5.a. Sens de variation et tableau de variation

f est dérivable sur $[0\,;1]$ comme polynôme et :

$$f'(x)=-6x^2+6x=6x(1-x).$$

Sur $[0\,;1]$, $x\geqslant 0$ et $1-x\geqslant 0$, donc $f'(x)\geqslant 0$ (et $f'(x)=0$ seulement en 0 et 1) : f est croissante sur $[0\,;1]$. Aux bornes : $f(0)=0$ et $f(1)=-2+3=1$.

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

RÉPONSE

f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, de $f(0)=0$ à $f(1)=1$.

5.b. Existence et unicité de α tel que $f(\alpha)=0{,}9$

MÉTHODE

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $[0\,;1]$.

Sur $[0\,;1]$, f est continue (fonction polynôme) et strictement croissante. De plus $f(0)=0$ et $f(1)=1$, donc $0{,}9\in\,[\,f(0)\,;f(1)\,]$.

RÉPONSE

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une **unique** valeur $\alpha \in [0\,;1]$ telle que $f(\alpha) = 0{,}9$.

5.c. Encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

À la calculatrice : $f(0{,}80) = 0{,}896 < 0{,}9$ et $f(0{,}81) \approx 0{,}905 > 0{,}9$.

RÉPONSE

$0{,}80 < \alpha < 0{,}81$.

5.d. Interprétation de α

Pour $p \in [0\,;1]$, on a $f(p) = P(Y \geqslant 2)$. L'égalité $f(\alpha) = 0{,}9$ se lit donc sur la probabilité de réussir au moins 2 lancers sur 3.

RÉPONSE

Pour que la probabilité de réussir au moins deux lancers-francs sur trois soit égale à $0{,}9$, il faut que la probabilité de réussite d'un lancer soit $p = \alpha$, soit **environ** $80\,\%$ (entre $0{,}80$ et $0{,}81$).

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace

(5 pts)

RAPPEL DE COURS

Repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. $A(1\,;2\,;3)$, $B(-1\,;3\,;1)$, $C(2\,;1\,;6)$, $D(3\,;-2\,;-1)$.

1.a. Montrons que A, B et C définissent un plan

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

S'ils étaient colinéaires, il existerait k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$; la première coordonnée imposerait $k=-2$, mais alors la deuxième donnerait $1=-2\times(-1)=2$, ce qui est faux. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

RÉPONSE

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés et **définissent un plan**.

1.b. Montrons que $\vec{n}(1\,;4\,;1)$ est normal au plan (ABC)

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\times(-2)+4\times1+1\times(-2) = -2+4-2 = 0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times1+4\times(-1)+1\times3 = 1-4+3 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

RÉPONSE

$\vec{n}(1\,;4\,;1)$ est un vecteur **normal** au plan (ABC).

1.c. Équation cartésienne du plan (ABC)

Un plan de vecteur normal $\vec{n}(1\,;4\,;1)$ admet une équation de la forme $x+4y+z+d=0$ avec d réel. Le point $A(1\,;2\,;3)$ appartient au plan :

$$1+4\times2+3+d=0 \iff 12+d=0 \iff d=-12.$$

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+4y+z-12=0$.

2.a. Représentation paramétrique de la droite (d)

(d) est perpendiculaire à (ABC) : elle admet $\vec{n}(1\,;4\,;1)$ comme vecteur directeur. Elle passe par $D(3\,;-2\,;-1)$:

RÉPONSE

$$(d) : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+4t \\ z = -1+t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

2.b. Coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC)

H appartient à (d), ses coordonnées sont $(3+t\,;-2+4t\,;-1+t)$. Il appartient aussi à (ABC), donc vérifie $x+4y+z-12=0$:

$$(3+t)+4(-2+4t)+(-1+t)-12=0 \iff 18t-18=0 \iff t=1.$$

D'où $\begin{cases} x_H = 3+1 \\ y_H = -2+4 \\ z_H = -1+1 \end{cases}$

RÉPONSE

Les coordonnées du projeté orthogonal sont $H(4\,;2\,;0)$.

2.c. Distance de D au plan (ABC)

La distance de D au plan (ABC) est égale à la longueur DH :

$$\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 4-3 \\ 2-(-2) \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad DH = \sqrt{1^2+4^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

RÉPONSE

La distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3.a. Montrons que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)\times 1 + 1\times(-1) + (-2)\times 3 = -2-1-6 = -9,$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}.$$

Avec $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = \frac{-3}{\sqrt{11}} = \frac{-3\sqrt{11}}{11}.$$

RÉPONSE

$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\dfrac{3\sqrt{11}}{11}.$

3.b. Valeur exacte de $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$

$\widehat{BAC}$ est un angle géométrique : $\widehat{BAC} \in [0\,;\pi]$, donc $\sin\left(\widehat{BAC}\right) \geqslant 0$. Avec $\cos^2+\sin^2 = 1$:

$$\sin^2\left(\widehat{BAC}\right) = 1 - \left(\frac{-3\sqrt{11}}{11}\right)^2 = 1 - \frac{9\times 11}{121} = 1 - \frac{99}{121} = \frac{22}{121}.$$

RÉPONSE

$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \sqrt{\dfrac{22}{121}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}.$

3.c. Montrons que l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

On a $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur

En prenant comme base le segment $[AB]$, la hauteur h issue de C se calcule par la trigonométrie : $h = AC \times \sin(\widehat{BAC})$.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{22}}{11}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{11}\sqrt{2}}{11}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3}{2} \times \frac{11\sqrt{2}}{11} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

RÉPONSE

L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Volume du tétraèdre $ABCD$

On prend pour base le triangle ABC d'aire $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. La hauteur associée est la distance de D au plan (ABC), soit $DH = 3\sqrt{2}$:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 2}{2} = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$

RÉPONSE

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 3 (unités de volume).

Exercice 4 — Vrai ou Faux

(5 pts)

Affirmation 1

$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)^5$ sur $\mathbb{R}$. On étudie la convexité via le signe de f''. On pose $u(x) = -\frac{1}{2}x+3$, donc $u'(x) = -\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = 5u'(x)\,u(x)^4 = -\frac{5}{2}\,u(x)^4, \qquad f''(x) = -\frac{5}{2} \times 4u'(x)\,u(x)^3 = 5\,u(x)^3 = 5\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $u(x) = -\frac{1}{2}x+3$: $f''(x) > 0$ pour $x < 6$ et $f''(x) < 0$ pour $x > 6$. La fonction f est donc convexe sur $]-\infty\,;6]$ puis concave sur $[6\,;+\infty[$: elle n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier.

RÉPONSE

Affirmation 1 **FAUSSE** : f change de convexité en $x = 6$ (point d'inflexion).

Affirmation 2

On tire simultanément 5 jetons parmi 32 : le nombre total de tirages est $\binom{32}{5}$. Les multiples de 8 entre 1 et 32 sont 8, 16, 24, 32, soit 4 jetons ; il reste 28 jetons non multiples de 8.

MÉTHODE

On passe par l'événement contraire : « aucun multiple de 8 », qui revient à choisir les 5 jetons parmi les 28 non multiples de 8.

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096.$$

RÉPONSE

Affirmation 2 **VRAIE** : il y a $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$ tirages contenant au moins un multiple de 8.

Affirmation 3

D'après l'arbre : $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{A}) = \frac{3}{5}$, $P_A(B) = \frac{1}{4}$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{7}{10}$, donc $P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{10}$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{5}{50} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

Puis :

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{10}}{\frac{7}{25}} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14}.$$

La valeur $\frac{9}{50}$ est en réalité $P(\overline{A} \cap B)$, et non $P_B(\overline{A})$.

RÉPONSE

Affirmation 3 **FAUSSE** : $P_B(\overline{A}) = \frac{9}{14}$ (et non $\frac{9}{50}$).

Affirmation 4

$h(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin(x)$. On dérive (produit) :

$$h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \sin(x) + \mathrm{e}^{-x} \cos(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big).$$

On vérifie l'équation (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x} \cos(x)$:

$$h'(x) + h(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\cos(x) - \sin(x)\big) + \mathrm{e}^{-x} \sin(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos(x).$$

L'égalité est vérifiée pour tout réel x.

RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : h est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5

MÉTHODE

Les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$.

Les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de (E) est $h(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin(x)$ (affirmation 4). Les solutions de (E) sont donc les fonctions :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \sin(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\sin(x) + C\big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

La forme proposée $k(x) = C\mathrm{e}^{-x} \sin(x)$ n'est pas correcte : en la dérivant, on obtient $k'(x) + k(x) = C\mathrm{e}^{-x} \cos(x)$, qui n'est égal à $\mathrm{e}^{-x} \cos(x)$ que pour $C = 1$.

RÉPONSE

Affirmation 5 **FAUSSE** : les solutions de (E) sont $k(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\sin(x) + C\big)$, avec $C \in \mathbb{R}$.