

# Corrigé

## Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 1 — Sujet 26-MATJ1JA1

Asie

### Exercice 1 — Tir à l'arc

(5 pts)

#### RAPPEL DE COURS

$p_1 = \frac{1}{2}$ . Si le centre est atteint au tir précédent, il est de nouveau atteint avec la probabilité  $\frac{4}{5}$  ; sinon avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ . On note  $p_n = P(T_n)$ .

#### 1. Valeur de $p_1$ et calcul de $p_2$

On a  $p_1 = \frac{1}{2}$ .

$T_1$  et  $\overline{T_1}$  forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

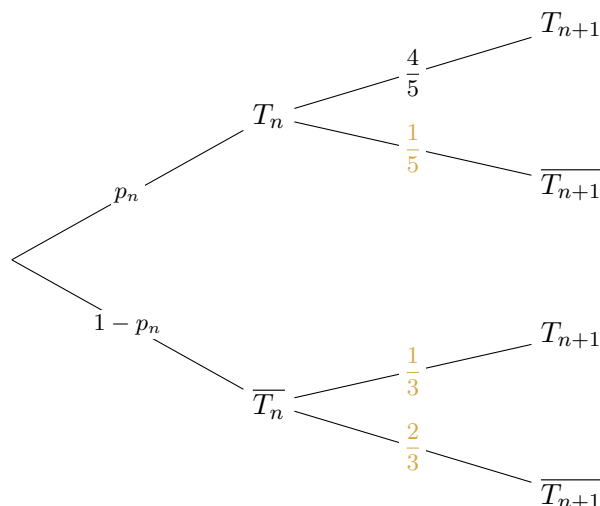
$$p_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$p_2 = P(T_1) P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1}) P_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} = \frac{17}{30}.$$

#### RÉPONSE

$$p_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{17}{30}.$$

#### 2. Arbre de probabilité complété



#### RÉPONSE

Branches manquantes (en doré) :  $P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{1}{5}$ ,  $P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$ ,  $P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{2}{3}$ .

### 3. Relation de récurrence

$T_n$  et  $\overline{T_n}$  forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(T_{n+1}) = P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$

$$p_{n+1} = P(T_n) P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n}) P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} (1 - p_n).$$

$$p_{n+1} = \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) p_n + \frac{1}{3} = \left(\frac{12}{15} - \frac{5}{15}\right) p_n + \frac{1}{3}.$$

#### RÉPONSE

Pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}$ .

### 4. Étude de la suite $(u_n)$ avec $u_n = p_n - \frac{5}{8}$

#### a. Nature de la suite $(u_n)$

#### MÉTHODE

On exprime  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  en remplaçant  $p_n = u_n + \frac{5}{8}$ .

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15} \left(u_n + \frac{5}{8}\right) - \frac{7}{24}.$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15} u_n + \frac{7}{24} - \frac{7}{24}.$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15} u_n.$$

Ainsi  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\frac{7}{15}$  et de premier terme :  $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$ .

#### RÉPONSE

$(u_n)$  est **géométrique** de raison  $q = \frac{7}{15}$  et de premier terme  $u_1 = -\frac{1}{8}$ .

#### b. Expression de $u_n$

Pour une suite géométrique,  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$  :

#### RÉPONSE

Pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n = -\frac{1}{8} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$ .

#### c. Expression de $p_n$

Comme  $p_n = u_n + \frac{5}{8}$  :

## RÉPONSE

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

5. Limite de la suite  $(p_n)$ 

Comme  $0 < \frac{7}{15} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1} = 0$ , d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \times 0 = \frac{5}{8}.$$

## RÉPONSE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{8} = 0,625$ . À long terme, la probabilité que le tireur atteigne le centre se stabilise autour de **0,625**.

## 6. Fonction Python seuil complétée

La boucle "WHILE" doit tourner tant que la condition recherchée n'est pas atteinte.

On utilise la relation de récurrence de la suite  $(p_n)$  dans la boucle.

## RÉPONSE

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n+1
        p = 7/15*p + 1/3
    return n
```

7. Résolution dans  $\mathbb{N}$  de  $p_n \geq 0,6$ 

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,6 &\iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} \iff -\frac{1}{8} \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} - \frac{5}{8} \\ &\iff -\frac{1}{8} \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq -\frac{1}{40} \iff \left( \frac{7}{15} \right)^{n-1} \leq \frac{8}{40} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On compose par  $\ln$  (fonction croissante) ; comme  $\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$ , la division inverse à nouveau le sens de l'inégalité :

$$(n-1) \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \iff n-1 \geq \frac{\ln(1/5)}{\ln(7/15)} \iff n \geq \frac{\ln(1/5)}{\ln(7/15)} + 1 \approx 3,11.$$

Ainsi  $n \geq 3,11$ , et comme  $n$  est entier :  $n \geq 4$ .

## RÉPONSE

$p_n \geq 0,6$  pour  $n \geq 4$  : c'est à partir du **4<sup>e</sup> tir** que la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible devient supérieure ou égale à 0,6.

## Exercice 2 — Vrai ou Faux

(5 pts)

**Affirmation 1**

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$  sur  $]1; +\infty[$ . Pour  $x > 1$ , on a  $x-1 > 0$  donc  $x-1 = \sqrt{(x-1)^2}$ , et  $x^2-1 = (x-1)(x+1)$  :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$ , par composition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1$ .

**RÉPONSE**

Affirmation 1 **VRAIE** :  $f$  admet bien pour limite 1 en  $+\infty$ .

**Affirmation 2**

$w_0 = 1, w_{n+1} = w_n + 2n + 3$ . On démontre par récurrence que  $w_n = (n+1)^2$ .

- *Initialisation* :  $w_0 = 1 = (0+1)^2$ . Vrai au rang 0.
- *Hérédité* : supposons  $w_n = (n+1)^2$  pour un entier naturel  $n$ . Alors

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

C'est bien  $((n+1)+1)^2$ , la propriété est héréditaire.

- *Conclusion* : D'après le principe de récurrence,  $w_n = (n+1)^2$  pour tout entier naturel  $n$ .

**RÉPONSE**

Affirmation 2 **VRAIE** : pour tout entier naturel  $n, w_n = (n+1)^2$ .

**Affirmation 3**

$X \sim \mathcal{B}(3; p)$ . La probabilité d'obtenir exactement un succès est :

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 = 3p(1-p)^2 = 3p(1-2p+p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3.$$

**RÉPONSE**

Affirmation 3 **VRAIE** :  $P(X = 1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$ .

**Affirmation 4**

$v_n = \int_0^1 e^{nx} dx$ . Une primitive de  $x \mapsto e^{nx}$  est  $x \mapsto \frac{1}{n} e^{nx}$  (avec  $n \geq 1$ ), donc :

$$v_n = \left[ \frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 = \frac{e^n - e^0}{n} = \frac{e^n - 1}{n} \neq \frac{e^n}{n}.$$

**RÉPONSE**

Affirmation 4 **FAUSSE** : en réalité  $v_n = \frac{e^n - 1}{n}$ .

**Affirmation 5**

Chaque case est coloriée indépendamment parmi 3 couleurs (rouge, jaune, noir). Pour 16 cases, le nombre de coloriages est donné par le principe multiplicatif :

$$3^{16} = 43\,046\,721 \quad \text{alors que} \quad \binom{16}{3} = 560.$$

$\binom{16}{3}$  compterait un choix de 3 cases parmi 16, ce qui ne correspond pas à la situation.

**RÉPONSE**

Affirmation 5 **FAUSSE** : il y a  $3^{16}$  coloriages possibles, et non  $\binom{16}{3}$ .

**Exercice 3 — Géométrie dans l'espace**

(5 pts)

**RAPPEL DE COURS**

Repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(3; 3; 1)$ ,  $E(2; -2; 2)$ ,  $F(3; 0; 4)$ ,  $G(5; 1; 2)$ .

**1.a. Montrons que les points  $B$ ,  $C$  et  $E$  ne sont pas alignés**

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

S'ils étaient colinéaires, il existerait  $k$  tel que  $\overrightarrow{BC} = k \overrightarrow{BE}$  ; la première coordonnée donnerait  $k = 2$ , mais alors la deuxième donnerait  $1 = 2 \times (-4) = -8$ , ce qui est faux. Les coordonnées des deux vecteurs ne sont visiblement pas proportionnelles.

**RÉPONSE**

$\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BE}$  ne sont pas colinéaires : les points  $B$ ,  $C$  et  $E$  ne sont pas alignés.

**1.b. Montrons que  $\overrightarrow{AF}$  est normal au plan  $(BCE)$** 

$$\text{Les coordonnées de } \overrightarrow{AF} \text{ sont } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) = 6 - 6 = 0,$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 3 \times 1 + 0 \times (-4) + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0.$$

$\overrightarrow{AF}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(BCE)$ .

**RÉPONSE**

$\overrightarrow{AF}$  est un vecteur **normal** au plan  $(BCE)$ .

**1.c. Équation cartésienne de  $(BCE)$** 

Un plan de vecteur normal  $\vec{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  admet une équation de la forme  $3x + 3z + d = 0$  avec  $d$  un réel.

Le point  $B(1; 2; 3)$  appartient au plan :

$$3 \times 1 + 3 \times 3 + d = 0 \iff d = -12.$$

Une équation cartésienne du plan  $(BCE)$  est  $3x + 3z - 12 = 0$ .

En simplifiant par 3, une équation cartésienne du plan  $(BCE)$  est  $x + z - 4 = 0$ .

**RÉPONSE**

Une équation cartésienne du plan  $(BCE)$  est  $x + z - 4 = 0$ .

**2.a. Montrons que le point  $G$  n'appartient pas à  $(BCE)$** 

On reporte les coordonnées de  $G(5; 1; 2)$  dans l'équation cartésienne du plan  $(BCE)$ :  $5 + 2 - 4 = 3 \neq 0$ . Les coordonnées du point  $G$  ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan  $(BCE)$ .

**RÉPONSE**

$G$  n'appartient pas au plan  $(BCE)$ .

**2.b. Montrons que  $\vec{BE}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{AG}$  ne sont pas coplanaires****MÉTHODE**

$\vec{BC}$  et  $\vec{BE}$  dirigent le plan  $(BCE)$ . Le vecteur  $\vec{AG}$  leur est coplanaire si, et seulement si, il est orthogonal au vecteur normal  $\vec{AF}$ .

$$\vec{AG} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AF} \cdot \vec{AG} = 3 \times 5 + 0 \times 1 + 3 \times 1 = 18 \neq 0.$$

$\vec{AG}$  n'est pas orthogonal à  $\vec{AF}$ .

**RÉPONSE**

Les vecteurs  $\vec{BE}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{AG}$  ne sont **pas coplanaires**.

**2.c. Montrons que la droite  $(AG)$  et le plan  $(BCE)$  sont sécants**

Puisque  $\vec{BE}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{AG}$  ne sont pas coplanaires, la droite  $(AG)$  n'est pas parallèle au plan : elle le coupe donc en un unique point.

**RÉPONSE**

$(AG)$  et  $(BCE)$  sont **sécants**.

**3.a. Représentation paramétrique de  $(AG)$** 

$(AG)$  passe par  $A(0; 0; 1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{AG} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  :

## RÉPONSE

$$(AG) : \begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**3.b. Coordonnées du point  $P$** 

$P$  appartient à  $(AG)$ , ses coordonnées sont  $(5t; t; 1 + t)$ . Il appartient aussi à  $(BCE)$ , donc vérifie  $x + z - 4 = 0$  :

$$5t + (1 + t) - 4 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_P = 5 \times \frac{1}{2} \\ y_P = \frac{1}{2} \\ z_P = 1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

## RÉPONSE

Les coordonnées de  $P$  sont  $P\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

**3.c. Montrons que  $P$  est le milieu de  $[EC]$** 

Le milieu  $M$  de  $[EC]$ , avec  $E(2; -2; 2)$  et  $C(3; 3; 1)$ , a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{2+3}{2}; \frac{-2+3}{2}; \frac{2+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

On retrouve les coordonnées de  $P$ .

## RÉPONSE

$P$  est bien le **milieu du segment**  $[EC]$ .

**4. Intersection des plans  $(BCE)$  et  $(ACG)$** 

## MÉTHODE

L'intersection de deux plans est une droite. On détermine deux points appartenant à la fois aux deux plans. La droite d'intersection passe par ces deux points.

Le point  $C$  appartient aux plans  $(BCE)$  et  $(ACG)$  donc le point  $C$  appartient à l'intersection des deux plans.

Le point  $P$  appartient à la droite  $(AG)$  et au plan  $(BCE)$  d'après la question 2.c.

La droite  $(AG)$  est incluse dans le plan  $(ACG)$  donc le point  $P$  appartient aussi au plan  $(ACG)$ .

Donc l'intersection des plans  $(BCE)$  et  $(ACG)$  est la droite  $(CP)$ .

## RÉPONSE

L'intersection des plans  $(BCE)$  et  $(ACG)$  est la **droite**  $(CP)$ .

## Exercice 4

(5 pts)

1.a. Calcul de  $g'(x)$ 

$$g'(x) = (x \cos x)' - (\sin x)' = (\cos x - x \sin x) - \cos x = -x \sin x.$$

## RÉPONSE

Pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  :  $g'(x) = -x \sin(x)$ .

1.b. Justification du tableau de variations de  $g$ 

Sur  $[0; 2\pi]$ ,  $x \geq 0$ , donc le signe de  $g'(x)$  est le signe de  $-x \sin x$ .

Sur  $[0; 2\pi]$ ,  $-x \leq 0$ , et  $\sin(x) \geq 0$  sur  $[0; \pi]$  et  $\sin(x) \leq 0$  sur  $[\pi; 2\pi]$ .

$x$	0		$\pi$		$2\pi$
$-x$	0	-		-	
$\sin(x)$	0	+	0	-	0
$g'(x)$	0	-	0	+	0

$$g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \quad g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$$

$$g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi.$$

$x$	0		$\pi$		$2\pi$	
$g'(x)$	0	-	0	+	0	
$g$	0	↘		$-\pi$	↗	
						$2\pi$

## RÉPONSE

$g$  est décroissante sur  $[0; \pi]$  (de 0 à  $-\pi$ ) puis croissante sur  $[\pi; 2\pi]$  (de  $-\pi$  à  $2\pi$ ).

1.c. Existence et unicité de  $\alpha \in [\pi; 2\pi]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ 

## MÉTHODE

On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur  $[\pi; 2\pi]$ .

Sur  $[\pi; 2\pi]$ ,  $g$  est continue (somme et produit de fonctions continues) et strictement croissante (d'après la question précédente). De plus  $g(\pi) = -\pi < 0$  et  $g(2\pi) = 2\pi > 0$ , donc  $0 \in ]g(\pi); g(2\pi)[$ .

## RÉPONSE

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une **unique** valeur  $\alpha \in [\pi; 2\pi]$  telle que  $g(\alpha) = 0$ .

**1.d. Tableau de signes de  $g$  sur  $]0; 2\pi]$**

Sur  $]0; \pi]$ ,  $g$  décroît de  $g(0) = 0$  à  $g(\pi) = -\pi$  :  $g(x) \leq 0$  (avec  $g(0) = 0$ ). Sur  $[\pi; 2\pi]$ ,  $g$  croît et s'annule en  $\alpha$  :  $g(x) < 0$  sur  $[\pi; \alpha[$  et  $g(x) > 0$  sur  $]\alpha; 2\pi]$ .

$x$	0		$\alpha$		$2\pi$
$g(x)$	0	-	0	+	

**RÉPONSE**

$g(x) < 0$  sur  $]0; \alpha[$ ,  $g(0) = g(\alpha) = 0$ , et  $g(x) > 0$  sur  $]\alpha; 2\pi]$ .

**2.a. Démonstration de  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  sur  $]0; 2\pi]$ . On dérive le quotient :

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' x - \sin x \times (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

**RÉPONSE**

Pour tout  $x \in ]0; 2\pi]$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

**2.b. Signe de  $f'$  sur  $]0; 2\pi]$**

Pour  $x \in ]0; 2\pi]$ ,  $x^2 > 0$  : le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$  (question 1.d).

**RÉPONSE**

$f'(x) < 0$  sur  $]0; \alpha[$ ,  $f'(\alpha) = 0$ , et  $f'(x) > 0$  sur  $]\alpha; 2\pi]$ .

**2.c. Variations de  $f$  sur  $]0; 2\pi]$**

$x$	0		$\alpha$		$2\pi$
$f'(x)$		-	0	+	
$f$	1	↘ $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ↗			0

**RÉPONSE**

$f$  est décroissante sur  $]0; \alpha]$  puis croissante sur  $[\alpha; 2\pi]$  ; elle admet un minimum en  $x = \alpha$ . (La valeur 1 à gauche est la limite de  $f$  en 0, voir question 2.d.)

**2.d. Limite de  $f$  en 0**

**MÉTHODE**

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

Quand  $x$  tend vers 0,  $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$

## RÉPONSE

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

**3. Inégalité**  $\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$  pour  $0 < r < s < \pi$

## MÉTHODE

On utilise la stricte décroissance de  $f$  sur  $]0; \pi]$ .

Sur  $]0; \pi]$ ,  $f$  est strictement décroissante. Comme  $0 < r < s < \pi$ , on a :

$$r < s \implies f(r) > f(s) \iff \frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s}.$$

Pour  $0 < s < \pi$ , on a  $s > 0$  et  $\sin s > 0$ , donc en multipliant par  $rs > 0$  puis en divisant par  $s \sin s > 0$  :

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s} \iff s \sin r > r \sin s \iff \frac{\sin r}{\sin s} > \frac{r}{s}.$$

## RÉPONSE

Pour tous réels  $r, s$  tels que  $0 < r < s < \pi$  :  $\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$ .