

Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 2

Antilles-Guyane — 17 juin 2026

Exercice 1 — Probabilités

(6 pts)

RAPPEL

Transmission d'un message le long d'une chaîne de relais. Pour chaque relai : si le message reçu est sans erreur, il est transmis sans erreur avec probabilité 0,94 ; s'il comporte des erreurs, il est corrigé (donc transmis sans erreur) avec probabilité 0,35. On donne $P(A_1) = 0,96$.

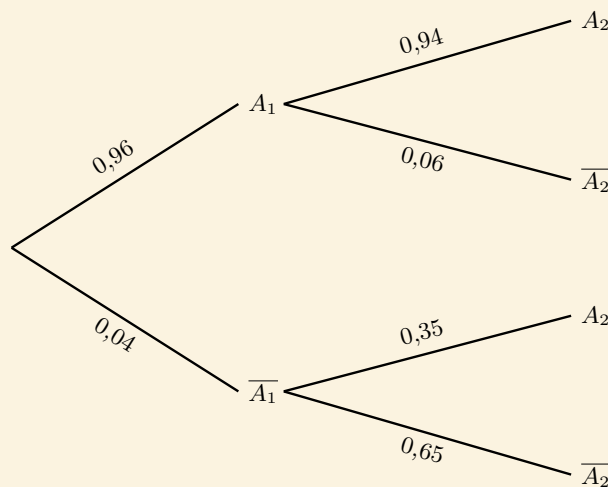
Partie A

1. Complétons l'arbre pondéré

MÉTHODE

Comme $P(A_1) = 0,96$, on a $P(\overline{A_1}) = 0,04$. Les transmissions vers A_2 donnent : $P_{A_1}(A_2) = 0,94$ (donc $P_{A_1}(\overline{A_2}) = 0,06$) et $P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0,35$ (donc $P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 0,65$).

RÉPONSE



2. Montrons que $P(A_2) = 0,9164$

MÉTHODE

Les événements A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers : on applique la formule des probabilités totales $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$.

$$P(A_2) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35.$$

$$P(A_2) = 0,9024 + 0,014 = 0,9164.$$

RÉPONSE

$$P(A_2) = 0,9164.$$

3. Calculons $P_{A_2}(\overline{A_1})$ et interprétons

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} = \frac{0,014}{0,9164} \approx 0,0153.$$

RÉPONSE

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) \approx 0,0153.$$

Interprétation : sachant que le message reçu par le deuxième relai est sans erreur, il y a environ 1,53 % de chances que le message reçu par le premier relai ait comporté des erreurs (erreurs corrigées entre les deux relais).

Partie B

RAPPEL

Un test est positif avec probabilité 0,04. Sur un échantillon de 50 tests assimilé à un tirage avec remise, X compte le nombre de tests positifs : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 50$ et $p = 0,04$.

1.a. Déterminons $P(X = 4)$

MÉTHODE

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} (0,04)^4 (0,96)^{46} \approx 0,0902.$$

RÉPONSE

$$P(X = 4) \approx 0,09 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}.$$

1.b. Donnons $P(X \geq 1)$

On passe par l'évènement contraire $\{X = 0\}$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,96)^{50} \approx 1 - 0,1299 \approx 0,8701.$$

RÉPONSE

$$P(X \geq 1) \approx 0,87 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}.$$

1.c. Calculons l'espérance et la variance de X

Pour une loi binomiale : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

$$E(X) = 50 \times 0,04 = 2, \quad V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = 1,92.$$

RÉPONSE

$$E(X) = 2 \text{ et } V(X) = 1,92.$$

2.a. Vérifions que $E(M) = 2$ et montrons que $V(M) = 0,0768$

MÉTHODE

Les variables X_1, \dots, X_{25} sont indépendantes, de même espérance 2 et de même variance 1,92, et $M = \frac{X_1 + \dots + X_{25}}{25}$. On utilise la linéarité de l'espérance, et $V(aX) = a^2V(X)$ avec l'indépendance pour la variance d'une somme.

$$E(M) = \frac{1}{25}(E(X_1) + \dots + E(X_{25})) = \frac{1}{25} \times 25 \times 2 = 2.$$

Par indépendance, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V(M) = \frac{1}{25^2}(V(X_1) + \dots + V(X_{25})) = \frac{1}{625} \times 25 \times 1,92 = \frac{1,92}{25} = 0,0768.$$

RÉPONSE

$E(M) = 2$ et $V(M) = 0,0768$.

2.b. Montrons que $P(M < 7) > 0,99$

MÉTHODE

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $a > 0$, $P(|M - E(M)| \geq a) \leq \frac{V(M)}{a^2}$. L'indication permet d'écrire $P(M < 7) = P(-3 < M < 7)$, intervalle centré en $E(M) = 2$ et de rayon 5.

L'intervalle $] - 3 ; 7[$ s'écrit $]2 - 5 ; 2 + 5[$: il est centré en 2 et de rayon 5. Ainsi :

$$P(-3 < M < 7) = P(|M - 2| < 5) = 1 - P(|M - 2| \geq 5).$$

Avec $a = 5$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|M - 2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2} = \frac{0,0768}{25} = 0,003072.$$

Par conséquent :

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7) \geq 1 - 0,003072 = 0,996928.$$

RÉPONSE

$P(M < 7) \geq 0,996928 > 0,99$: la probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est bien **supérieure à 0,99**.

Partie C

RAPPEL

$p_n = P(A_n)$ avec $p_1 = 0,96$, et pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,59p_n + 0,35$.

1. Montrons par récurrence que $p_{n+1} \leq p_n$ pour tout $n \geq 1$

On note $P(n)$ la propriété : $p_{n+1} \leq p_n$.

Initialisation. On calcule $p_2 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,5664 + 0,35 = 0,9164$. Comme $0,9164 \leq 0,96$, on a $p_2 \leq p_1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$, soit $p_{n+1} \leq p_n$. Puisque $0,59 > 0$, la multiplication conserve l'ordre, puis l'ajout de 0,35 aussi :

$$p_{n+1} \leq p_n \iff 0,59p_{n+1} \leq 0,59p_n \iff 0,59p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59p_n + 0,35.$$

Le membre de gauche vaut p_{n+2} et celui de droite p_{n+1} , d'où $p_{n+2} \leq p_{n+1}$: $P(n+1)$ est vraie.

RÉPONSE

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} \leq p_n$. La suite (p_n) est donc **décroissante**.

2. Montrons que la suite (p_n) est convergente

Chaque terme $p_n = P(A_n)$ est une probabilité : $0 \leq p_n \leq 1$. La suite (p_n) est donc **minorée** (par 0).

RÉPONSE

La suite (p_n) est décroissante (question 1) et minorée par 0. D'après le théorème de la convergence monotone, elle **converge**.

3. Déterminons la valeur exacte de sa limite**MÉTHODE**

La suite converge vers un réel ℓ . Comme $p_{n+1} = 0,59 p_n + 0,35$, par unicité de la limite (la fonction affine $x \mapsto 0,59x + 0,35$ est continue), ℓ vérifie $\ell = 0,59 \ell + 0,35$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = \ell$, d'où :

$$\ell = 0,59 \ell + 0,35 \iff \ell - 0,59 \ell = 0,35 \iff 0,41 \ell = 0,35 \iff \ell = \frac{0,35}{0,41} = \frac{35}{41}.$$

RÉPONSE

La suite (p_n) converge vers $\ell = \frac{35}{41} \approx 0,854$.

Exercice 2 — Géométrie dans l'espace

(5 pts)

RAPPEL

Repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, unité le mètre. Avec A l'origine :

$$A(0; 0; 0), \quad B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right), \quad C\left(\frac{9}{4}; 3; 0\right), \quad D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right).$$

Le module est le tétraèdre $ABCD$.

Partie A**1.a. Montrons que le triangle ABC est isocèle en C**

On compare les longueurs CA et CB :

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + 9} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4},$$

$$CB = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + 9} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

RÉPONSE

$CA = CB = \frac{15}{4}$: le triangle ABC est **isocèle en C** .

1.b. Montrons que l'aire du triangle ABC est $6,75 \text{ m}^2$ **MÉTHODE**

Le triangle est isocèle en C : le pied K de la hauteur issue de C est le milieu de $[AB]$. On calcule l'aire par $\frac{1}{2} \times AB \times CK$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $AB = \frac{9}{2}$. Le milieu de $[AB]$ est $K\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right)$, d'où :

$$\overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CK = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CK = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4} = 6,75.$$

RÉPONSE

L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{27}{4} = \mathbf{6,75 \text{ m}^2}$.

2.a. Vérifions qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$

Les trois points A, B, C ont une cote nulle ($z_A = z_B = z_C = 0$) : ils vérifient tous l'équation $z = 0$. De plus A, B, C ne sont pas alignés (le triangle ABC a une aire non nulle), donc ils définissent un plan unique.

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

2.b. Montrons que $H(\frac{3}{2}; 1; 0)$ est le projeté orthogonal de D sur (ABC)

MÉTHODE

Il faut vérifier deux points : H appartient au plan (ABC) , et \overrightarrow{DH} est orthogonal à ce plan (c'est-à-dire colinéaire à un vecteur normal du plan $z = 0$).

- $H \in (ABC)$: la cote de H est nulle, donc H vérifie $z = 0$.
- $\overrightarrow{DH} \perp (ABC)$: avec $D(\frac{3}{2}; 1; 3)$,

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ 1 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Le plan $z = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{DH} = -3\vec{k}$: \overrightarrow{DH} est colinéaire à \vec{k} , donc orthogonal au plan.

RÉPONSE

H appartient à (ABC) et \overrightarrow{DH} est orthogonal à (ABC) : H est le **projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)** .

3. Déduisons-en le volume du module

MÉTHODE

On prend pour base le triangle ABC (aire $\mathcal{B} = 6,75$) et pour hauteur relative la distance de D au plan (ABC) , c'est-à-dire $h = DH$.

La hauteur est $h = DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3$. D'où :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = 6,75.$$

RÉPONSE

Le volume du module est $\mathcal{V} = \frac{27}{4} = 6,75 \text{ m}^3$.

Partie B

1.a. Montrons que $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD)

On forme deux vecteurs directeurs du plan (BCD) :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée de \overrightarrow{BC} est nulle alors que celle de \overrightarrow{BD} ne l'est pas). On calcule les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 + 0 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

RÉPONSE

\vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : c'est donc un **vecteur normal** au plan (BCD) .

1.b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (BCD)

Le plan (BCD) admet une équation de la forme $4x + 3y + 3z + d = 0$ (coefficients donnés par \vec{n}). Le point $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right)$ appartient au plan :

$$4 \times \frac{9}{2} + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0 \iff 18 + d = 0 \iff d = -18.$$

RÉPONSE

Une équation cartésienne du plan (BCD) est $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

1.c. Donnons une représentation paramétrique de la droite Δ

La droite Δ est orthogonale au plan (BCD) : elle est dirigée par un vecteur normal de ce plan, par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, et elle passe par $D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$.

RÉPONSE

$$\Delta : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Montrons que $L\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$ **MÉTHODE**

L est le point d'intersection de Δ et du plan (ABC) d'équation $z = 0$: on reporte la représentation paramétrique de Δ dans cette équation pour déterminer le paramètre t .

La cote d'un point de Δ est $z = 3 + 3t$. La condition $z = 0$ donne :

$$3 + 3t = 0 \iff t = -1.$$

On reporte $t = -1$ dans Δ :

$$x = \frac{3}{2} + 4 \times (-1) = -\frac{5}{2}, \quad y = 1 + 3 \times (-1) = -2, \quad z = 3 + 3 \times (-1) = 0.$$

RÉPONSE

Le point d'intersection a pour coordonnées $L\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

3. Montrons que le module est adapté aux débutants**MÉTHODE**

Le module est adapté si l'angle $\widehat{LDH} < 60^\circ$. On calcule $\cos(\widehat{LDH})$ à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DH}$, puis on compare à $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.

Avec $D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$, $L\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$ et $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$:

$$\overrightarrow{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DH} = (-4) \times 0 + (-3) \times 0 + (-3) \times (-3) = 9,$$

$$DL = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}, \quad DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3.$$

On en déduit :

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{DH}}{DL \times DH} = \frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Comparons à $\frac{1}{2}$. Comme tout est positif :

$$\frac{3}{\sqrt{34}} > \frac{1}{2} \iff 6 > \sqrt{34} \iff 36 > 34,$$

ce qui est vrai. Donc $\cos(\widehat{LDH}) > \cos(60^\circ)$; or la fonction cosinus est décroissante sur $[0^\circ; 180^\circ]$, donc $\widehat{LDH} < 60^\circ$. (Numériquement, $\widehat{LDH} \approx 59,0^\circ$.)

RÉPONSE

$\widehat{LDH} < 60^\circ$: le module est bien **adapté aux débutants**.

Exercice 3 — Vrai ou Faux

(4 pts)

Affirmation 1. (E_1) : $y' + 2y = 0$ avec $f(0) = 1$; la courbe de f passe par $A(\ln 2 ; \frac{1}{2})$.

MÉTHODE

Les solutions de $y' + 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. La condition $f(0) = 1$ détermine C .

On a $f(x) = C e^{-2x}$ et $f(0) = C = 1$, donc $f(x) = e^{-2x}$. Alors :

$$f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

RÉPONSE

Affirmation 1 **FAUSSE** : la courbe passe par le point $(\ln 2 ; \frac{1}{4})$, et non par $A(\ln 2 ; \frac{1}{2})$.

Affirmation 2. Sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$, la courbe de $f(x) = x - \cos(x)$ est au-dessus de ses tangentes.

MÉTHODE

Une courbe est au-dessus de toutes ses tangentes sur un intervalle si et seulement si la fonction y est **convexe**, c'est-à-dire $f'' \geq 0$ sur cet intervalle.

f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} :

$$f'(x) = 1 + \sin(x), \quad f''(x) = \cos(x).$$

Sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$, on a $\cos(x) \leq 0$, donc $f''(x) \leq 0$: la fonction f y est **concave**, et sa courbe est *au-dessous* de ses tangentes.

RÉPONSE

Affirmation 2 **FAUSSE** : sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $f'' \leq 0$, donc la courbe est au-dessous de ses tangentes.

Affirmation 3. La droite $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de $f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$, puis :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1.$$

RÉPONSE

Affirmation 3 **VRAIE** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc la droite $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Affirmation 4. (E_2) : $y' - 3y = 2 - 6x$; la fonction $f(x) = 2x - e^{3x}$ est solution de (E_2) .

MÉTHODE

Il suffit de vérifier que f satisfait l'équation, en calculant $f'(x) - 3f(x)$ et en le comparant au second membre $2 - 6x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2 - 3e^{3x}$. Alors :

$$f'(x) - 3f(x) = (2 - 3e^{3x}) - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

On retrouve exactement le second membre de (E_2) .

RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : $f'(x) - 3f(x) = 2 - 6x$, donc f est bien une solution de (E_2) .

Exercice 4 — Fonctions et logarithme

(5 pts)

RAPPEL

Pour $k > 0$, f_k est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$, de courbe C_k .

Partie A : cas $k = 2$ 1. Donnons les variations d'une primitive F_2 de f_2 sur $]0 ; 3]$

MÉTHODE

Comme $F_2' = f_2$, le sens de variation de F_2 est donné par le **signe de** f_2 , que l'on lit sur la courbe C_2 : F_2 croît là où C_2 est au-dessus de l'axe des abscisses, et décroît là où C_2 est en dessous.

Avec la précision permise par le graphique, la courbe C_2 est : *en dessous* de l'axe des abscisses sur $]0 ; 0,3]$ environ, *au-dessus* sur $[0,3 ; 2,5]$ environ, puis *en dessous* sur $[2,5 ; 3]$. Donc f_2 est négative, puis positive, puis négative.

RÉPONSE

Sur $]0 ; 3]$, la primitive F_2 est :

x	0	0,3	2,5	3		
$f_2(x) = F_2'(x)$		-	0	+	0	-
F_2		↘		↗		↘

Ainsi F_2 est **décroissante** sur $]0 ; 0,3]$, **croissante** sur $[0,3 ; 2,5]$ et **décroissante** sur $[2,5 ; 3]$ (valeurs approchées lues sur le graphique).

2. Identifions parmi les trois courbes celle représentant f_2' et celle représentant f_2''

On calcule les deux dérivées de $f_2(x) = 1 - x + \frac{2(1 + \ln x)}{x}$. Or $\frac{d}{dx} \left[\frac{1 + \ln x}{x} \right] = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$, d'où :

$$f_2'(x) = -1 - \frac{2 \ln x}{x^2}, \quad f_2''(x) = \frac{2(2 \ln x - 1)}{x^3}.$$

Étude de f_2' (limites et signe).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2'(x) = +\infty \quad (\text{asymptote verticale : l'axe des ordonnées}),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2'(x) = -1 \quad (\text{asymptote horizontale } y = -1, \text{ sous l'axe}).$$

De plus, sur C_2 , la fonction f_2 croît puis décroît : f_2' est donc positive puis négative. La **Courbe 1** est la seule à présenter une branche infinie vers $+\infty$ en 0, à prendre des valeurs négatives et à tendre vers -1 .

Étude de f_2'' (limites et inflexion). Le point A est un point d'inflexion de C_2 : en son abscisse, f_2'' s'annule en changeant de signe. Comme $f_2''(x) = \frac{2(2 \ln x - 1)}{x^3}$, on a $f_2''(x) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$. Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2''(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2''(x) = 0 \quad (\text{asymptote horizontale } y = 0).$$

La **Courbe 2** plonge vers $-\infty$ en 0, s'annule une seule fois puis se rapproche de l'axe des abscisses ($y = 0$) : elle correspond à f_2'' . La Courbe 3, croissante sans asymptote horizontale, ne peut convenir.

RÉPONSE

La **Courbe 1** représente f_2' et la **Courbe 2** représente f_2'' .

Partie B : cas $k = 1$ **RAPPEL**

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x} \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

1.a. Montrons que $f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}$ pour tout $x > 0$

f_1 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. En réutilisant $\frac{d}{dx} \left[\frac{1 + \ln x}{x} \right] = \frac{-\ln x}{x^2}$:

$$f_1'(x) = 0 - 1 + \frac{-\ln x}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

RÉPONSE

Pour tout $x > 0$: $f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

1.b. Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x)$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1 - 0 = -1.$$

RÉPONSE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1.$$

2.a. Justifions les variations de f_1' et la valeur de l'extremum

MÉTHODE

Les variations de f_1' sont données par le signe de sa dérivée f_1'' , que l'énoncé fournit : $f_1''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$.

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$: le signe de $f_1''(x)$ est celui de $2 \ln x - 1$.

$$2 \ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Ainsi $f_1''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{e}[$ (donc f_1' décroissante) et $f_1''(x) > 0$ sur $]\sqrt{e} ; +\infty[$ (donc f_1' croissante) : f_1' admet un **minimum** en $x = \sqrt{e}$. Sa valeur :

$$f_1'(\sqrt{e}) = -1 - \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = -1 - \frac{\frac{1}{2}}{e} = -1 - \frac{1}{2e}.$$

RÉPONSE

f_1' est décroissante sur $]0 ; \sqrt{e}[$ puis croissante sur $]\sqrt{e} ; +\infty[$; son minimum, atteint en \sqrt{e} , vaut

$$-1 - \frac{1}{2e}.$$

2.b. Justifions la limite de f'_1 en 0

On étudie séparément les facteurs : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-1 - \frac{\ln x}{x^2} \right) = -1 - (-\infty) = +\infty.$$

RÉPONSE

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_1(x) = +\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de f'_1).

2.c. Montrons l'existence d'une unique solution α à $f'_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum

MÉTHODE

On applique le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) sur chacun des deux intervalles de monotonie de f'_1 .

- **Sur $]0 ; \sqrt{e}[$:** f'_1 est continue et *strictement décroissante*, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_1(x) = +\infty > 0$ et $f'_1(\sqrt{e}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$. Comme 0 est compris entre ces deux valeurs, l'équation $f'_1(x) = 0$ admet une **unique** solution α sur cet intervalle.

- **Sur $[\sqrt{e} ; +\infty[$:** f'_1 croît de $-1 - \frac{1}{2e}$ vers -1 , valeurs toutes *strictement négatives*. Donc f'_1 ne s'annule pas sur cet intervalle.

L'équation $f'_1(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in]0 ; \sqrt{e}[$. Par balayage, $\alpha \approx 0,65$.

De plus f'_1 est positive sur $]0 ; \alpha[$ et négative sur $]\alpha ; +\infty[$: f_1 est croissante puis décroissante.

RÉPONSE

L'équation $f'_1(x) = 0$ admet une **unique** solution $\alpha \approx 0,65$ sur $]0 ; +\infty[$. Comme f'_1 change de signe (+ puis -) en α , la fonction f_1 admet un **maximum** sur $]0 ; +\infty[$, atteint en α .

2.d. Complétons le programme Python

MÉTHODE

Sur $]0 ; \sqrt{e}[$, la fonction $d = f'_1$ est strictement décroissante et s'annule en α . En partant de $u = 0,5$ (où $d(u) > 0$) et en augmentant u d'un pas de 0,01 *tant que* $d(u) > 0$, on s'arrête au premier u tel que $d(u) \leq 0$: c'est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

RÉPONSE

```
def d(x) :
    return -1 - ln(x) / x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u) > 0 :
        u = u + 0.01
    return u
```

Les pointillés sont remplacés par > 0 (condition de la boucle) et par $u + 0.01$ (incrément). La fonction renvoie $u \approx 0,66$.

Partie C : k quelconque**1. Montrons que H est une primitive de h sur $]0 ; +\infty[$**

On dérive $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$. En posant $w(x) = 1 + \ln x$ (donc $w'(x) = \frac{1}{x}$), $H = \frac{1}{2}w^2$ et $H' = \frac{1}{2} \times 2w w' = w w'$:

$$H'(x) = (1 + \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x} = h(x).$$

RÉPONSE

$H' = h$ sur $]0 ; +\infty[$: la fonction H est bien une **primitive** de h .

2. Existe-t-il une valeur de k telle que la valeur moyenne de f_k sur $[1 ; e]$ soit nulle ?**MÉTHODE**

La valeur moyenne de f_k sur $[1 ; e]$ est $\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx$. On la calcule en séparant $f_k = (1-x) + kh$, l'intégrale de h s'obtenant via la primitive H de la question 1.

$$\int_1^e (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \left(e - \frac{e^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = e - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$\int_1^e h(x) dx = [H(x)]_1^e = \frac{1}{2}(1 + \ln e)^2 - \frac{1}{2}(1 + \ln 1)^2 = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}.$$

Donc :

$$\int_1^e f_k(x) dx = \left(e - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3k}{2}.$$

La valeur moyenne est nulle si et seulement si cette intégrale est nulle :

$$\frac{3k}{2} = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 2e + 1) = \frac{(e-1)^2}{2} \iff k = \frac{(e-1)^2}{3}.$$

Cette valeur est strictement positive (car $(e-1)^2 > 0$), donc admissible.

RÉPONSE

Oui : pour $k = \frac{(e-1)^2}{3} \approx 0,98$ (réel strictement positif), la valeur moyenne de f_k sur $[1 ; e]$ est nulle.