Corrigé

Épreuve d'enseignement de spécialité — Mathématiques

Baccalauréat Général — Session 2026 — Jour 1 — Sujet 26-MATJ1AG1

Antilles-Guyane

Exercice 1 — Probabilités

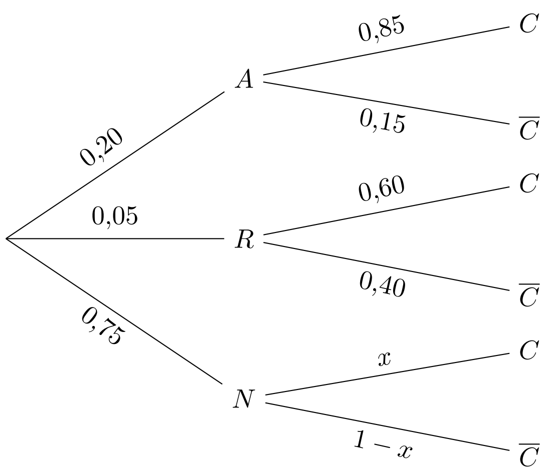
(4 pts)

Partie A

RAPPEL

$P(A) = 0{,}20$ (arrêt), $P(R) = 0{,}05$ (ralenti), $P(N) = 0{,}75$ (normal). De plus $P_A(C) = 0{,}85$, $P_R(C) = 0{,}60$ et $x = P_N(C)$.

1. Arbre de probabilité complété



2. Probabilité que le réacteur soit en arrêt et subisse un contrôle

D'après la règle du produit le long d'une branche :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}20 \times 0{,}85 = 0{,}17.$$

RÉPONSE

La probabilité que le réacteur soit en arrêt et subisse un contrôle est $P(A \cap C) = 0{,}17$.

3. Montrons que $x = 0{,}2$

Les événements A, R et N forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(R \cap C) + P(N \cap C)$$

$$P(C) = P(A \cap C) + P(R) \times P_R(C) + P(N) \times P_N(C)$$

$$P(C) = 0{,}17 + 0{,}05 \times 0{,}60 + 0{,}75 \times x = 0{,}17 + 0{,}03 + 0{,}75x = 0{,}20 + 0{,}75x.$$

Or $P(C) = 0{,}35$, donc :

$$0{,}20 + 0{,}75x = 0{,}35 \iff 0{,}75x = 0{,}15 \iff x = \frac{0{,}15}{0{,}75} = 0{,}2.$$

RÉPONSE

$x = P_N(C) = 0{,}2$.

4. Probabilité qu'il fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle

On cherche $P_C(N)$:

$$P_C(N) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}2}{0{,}35} = \frac{0{,}15}{0{,}35} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429.$$

RÉPONSE

La probabilité que le réacteur fonctionne normalement sachant qu'il subit un contrôle est $P_C(N) = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$.

Partie B

RAPPEL

Production journalière : 16 GWh (normal), 10 GWh (ralenti), 0 GWh (arrêt), avec $P(N) = 0{,}75$, $P(R) = 0{,}05$ et $P(A) = 0{,}20$.

1.a. Loi de probabilité de X

k	0	10	16
p_k	$0{,}20$	$0{,}05$	$0{,}75$

1.b. Espérance et variance de X

$$E(X) = 0 \times 0{,}20 + 10 \times 0{,}05 + 16 \times 0{,}75 = 0 + 0{,}5 + 12 = 12{,}5.$$

Calcul de la variance :

$$V(X) = 0{,}20 \times (0 - 12{,}5)^2 + 0{,}05 \times (10 - 12{,}5)^2 + 0{,}75 \times (16 - 12{,}5)^2$$

$$V(X) = 40{,}75.$$

RÉPONSE

$E(X) = 12{,}5$ et $V(X) = 40{,}75$.

2.a. Espérance et variance de S

Les variables $X_1, \ldots, X_{12}$ ont la même loi que X et sont indépendantes. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{12} E(X_i) = 12 \times 12{,}5 = 150.$$

Par indépendance des X_i (la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances) :

$$V(S) = \sum_{i=1}^{12} V(X_i) = 12 \times 40{,}75 = 489.$$

RÉPONSE

$E(S) = 150$ et $V(S) = 489$.

2.b. Probabilité d'éviter la surcharge

MÉTHODE

L'encadrement $100 < S < 200$ est centré sur $E(S) = 150$: il s'écrit $|S - 150| < 50$. On applique l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev avec $a = 50$.

$$P\big(|S - E(S)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(S)}{a^2} \quad \Longrightarrow \quad P\big(|S - 150| \geqslant 50\big) \leqslant \frac{489}{50^2} = \frac{489}{2500} = 0{,}1956.$$

En passant à l'événement contraire :

$$-P\big(|S - 150| \geqslant 50\big) \geqslant -0{,}1956$$

$$1 - P\big(|S - 150| \geqslant 50\big) \geqslant 1 - 0{,}1956$$

$$P\big(|S - 150| < 50\big) \geqslant 0{,}8044$$

$$P(100 < S < 200) \geqslant 0{,}8044$$

RÉPONSE

$P(100 < S < 200) \geqslant 0{,}8044 > 0{,}80$: on peut **affirmer** que la probabilité d'éviter la surcharge et de couvrir les besoins est supérieure à $0{,}80$.

Exercice 2 — Équation différentielle et suites

(6 pts)

Partie A — Premier protocole

RAPPEL

q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de (E) : $y' = -\dfrac{3}{10}y + 1$, avec $q(0) = 1$.

1. Solutions de (E)

MÉTHODE

Les solutions de $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ici $a = -\dfrac{3}{10}$ et $b = 1$, donc $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-3/10} = \dfrac{10}{3}$.

RÉPONSE

Les solutions de (E) sont les fonctions $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + \dfrac{10}{3}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Expression de $q(t)$

La condition initiale $q(0) = 1$ donne :

$$C\,\mathrm{e}^0 + \frac{10}{3} = 1 \iff C = 1 - \frac{10}{3} \iff C = -\frac{7}{3}.$$

RÉPONSE

Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $q(t) = \dfrac{10}{3} - \dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$.

3. Limite de q en $+\infty$

Quand $t \to +\infty$, $-\dfrac{3}{10}t \to -\infty$ donc $\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \to 0$:

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \times 0 = \frac{10}{3}.$$

RÉPONSE

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} q(t) = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$: à long terme, la quantité de médicament dans le sang se stabilise autour de $\dfrac{10}{3} \approx 3{,}33$ mg.

4. Variations de q

q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$q'(t) = -\frac{7}{3} \times \left(-\frac{3}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} = \frac{7}{10}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} > 0$, on a $q'(t) > 0$.

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$q'(t)$	$+$
q	$1 \nearrow \frac{10}{3}$

RÉPONSE

$q'(t) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$: la fonction q est **strictement croissante**.

5. Instant d'apparition du risque

Le risque apparaît dès que $q(t) \geqslant 3$:

$$\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \geqslant 3 \iff -\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \geqslant 3 - \frac{10}{3} \iff -\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \geqslant -\frac{1}{3}.$$

On multiplie par $-\dfrac{3}{7} < 0$ (l'inégalité change de sens) :

$$\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} \leqslant \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7} \iff -\frac{3}{10}t \leqslant \ln\left(\frac{1}{7}\right) = -\ln(7) \iff t \geqslant \frac{10}{3}\ln(7).$$

RÉPONSE

Le risque apparaît à partir de $t = \dfrac{10}{3}\ln(7)$ h, soit $t \approx 6{,}5$ h.

6. Le protocole présente-t-il un risque ?

RÉPONSE

Le traitement doit durer *au moins* $7\,\mathrm{h}$. Or le seuil de toxicité est atteint dès $t \approx 6{,}5\,\mathrm{h} < 7\,\mathrm{h}$: pendant le traitement, la quantité de médicament dépasse $3\,\mathrm{mg}$. Ce protocole **présente donc un risque** pour le patient.

Partie B — Second protocole

RAPPEL

$u_0 = 1$; chaque heure la quantité baisse de $30\,\%$ puis on ajoute $0{,}75\,\mathrm{mg}$.

1. Relation de récurrence

Une baisse de $30\,\%$ laisse $70\,\%$ de la quantité, soit $0{,}7\,u_n$; on ajoute ensuite $0{,}75\,\mathrm{mg}$.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 0{,}75$.

2.a. Récurrence : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

MÉTHODE

On note $P(n)$ la propriété « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ » et on raisonne par récurrence en utilisant que la fonction $x \mapsto 0{,}7x + 0{,}75$ est croissante.

Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = 0{,}7 \times 1 + 0{,}75 = 1{,}45$. On a bien $1 \leqslant 1{,}45 \leqslant 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La fonction $x \mapsto 0{,}7x + 0{,}75$ étant croissante :

$$0{,}7\,u_n + 0{,}75 \leqslant 0{,}7\,u_{n+1} + 0{,}75 \leqslant 0{,}7 \times 4 + 0{,}75,$$

soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3{,}55 \leqslant 4$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

2.b. Convergence de (u_n)

RÉPONSE

La suite (u_n) est **croissante** (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et **majorée par** 4 : d'après le théorème de convergence monotone, elle est **convergente**.

2.c. Limite de (u_n)

La fonction $x \mapsto 0{,}7x + 0{,}75$ est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et (u_n) converge; la limite ℓ vérifie donc $\ell = 0{,}7\,\ell + 0{,}75$:

$$\ell = 0{,}7\,\ell + 0{,}75 \iff 0{,}3\,\ell = 0{,}75 \iff \ell = 2{,}5.$$

RÉPONSE

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 2{,}5.$

2.d. Le traitement présente-t-il un risque ?

RÉPONSE

La suite (u_n) est croissante et converge vers $2{,}5$: pour tout n, $u_n < 2{,}5 < 3$. La quantité ne dépasse jamais $3\,\mathrm{mg}$: ce protocole **ne présente pas de risque** pour le patient.

3.a. (v_n) est géométrique

Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 2{,}5$. On calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2{,}5 = 0{,}7\,u_n + 0{,}75 - 2{,}5 = 0{,}7\,u_n - 1{,}75 = 0{,}7\big(u_n - 2{,}5\big) = 0{,}7\,v_n.$$

RÉPONSE

(v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2{,}5 = -1{,}5$.

3.b. Expression de u_n

Comme (v_n) est géométrique : $v_n = v_0 \times 0{,}7^n = -1{,}5 \times 0{,}7^n$. Or $u_n = v_n + 2{,}5$, donc :

RÉPONSE

Pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}7^n$.

4. Nombre d'injections pour dépasser $2{,}4\,\mathrm{mg}$

On résout $u_n > 2{,}4$:

$$2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}7^n > 2{,}4 \iff -1{,}5 \times 0{,}7^n > -0{,}1 \iff 0{,}7^n < \frac{0{,}1}{1{,}5} = \frac{1}{15}.$$

On compose par $\ln$ (croissant) ; comme $\ln(0{,}7) < 0$, l'inégalité change de sens :

$$n\ln(0{,}7) < \ln\left(\frac{1}{15}\right) \iff n > \frac{\ln(1/15)}{\ln(0{,}7)} = \frac{\ln(15)}{-\ln(0{,}7)} \approx 7{,}6.$$

Le plus petit entier convenable est $n = 8$. *Vérification :* $u_7 \approx 2{,}38 < 2{,}4$ et $u_8 \approx 2{,}41 > 2{,}4$.

RÉPONSE

C'est au bout de 8 **injections supplémentaires** que la quantité de médicament dépasse $2{,}4\,\mathrm{mg}$.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace (Vrai/Faux)

(4 pts)

RAPPEL

$S(-1\,;\sqrt{2}\,;-4)$, $A(2\,;\sqrt{2}\,;-1)$, $B(1\,;\sqrt{2}\,;0)$, $C(2\,;0\,;-1)$; droite (d) : $x = 2-k,\ y = \sqrt{2}\,k,\ z = -1-k$; plan P : $x - z + 1 = 0$.

Affirmation 1 : $\overrightarrow{SA}$ est normal à (ABC)

$$\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (les points A, B, C ne sont pas alignés). On calcule les produits scalaires :

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB} = 3\times(-1)+0\times 0+3\times 1 = 0,\qquad \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 0+0\times(-\sqrt{2})+3\times 0 = 0.$$

$\overrightarrow{SA}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

RÉPONSE

Affirmation 1 **VRAIE** : $\overrightarrow{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : (SB) et d sont sécantes

$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ dirige (SB), soit la représentation $\begin{cases}x = -1+2t\\ y = \sqrt{2}\\ z = -4+4t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. On cherche un point commun avec (d) :

$$\begin{cases}-1+2t = 2-k\\ \sqrt{2} = \sqrt{2}\,k\\ -4+4t = -1-k\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-1+2t = 2-k\\ k = 1\\ -4+4t = -1-k\end{cases} \iff \begin{cases}-1+2t = 1\\ k = 1\\ -4+4t = -2\end{cases} \iff \begin{cases}t = 1\\ k = 1\\ t = \frac{1}{2}\end{cases}.$$

Le système n'admet pas un unique couple $(k;t)$ comme solution donc les droites (SB) et (d) ne sont pas sécantes.

RÉPONSE

Affirmation 2 **FAUSSE** : (SB) et (d) ne sont pas sécantes.

Affirmation 3 : d est parallèle à P

La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (-1)\times 1+\sqrt{2}\times 0+(-1)\times(-1) = -1+1 = 0.$$

$\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$: (d) est parallèle à P (ou incluse dans P). Le point de (d) obtenu pour $k=0$ est $(2\,;0\,;-1)$; or $2-(-1)+1 = 4 \neq 0$, donc ce point n'appartient pas à P.

RÉPONSE

Affirmation 3 **VRAIE** : (d) est strictement parallèle au plan P.

Affirmation 4 : le projeté orthogonal de S sur P est $H(-3\,;\sqrt{2}\,;-2)$

Le projeté orthogonal H de S sur P est l'intersection de P avec la droite passant par S et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = -1 + s \\ y = \sqrt{2} \\ z = -4 - s \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

On reporte dans l'équation de P :

$$(-1+s) - (-4-s) + 1 = 0 \iff 2s + 4 = 0 \iff s = -2.$$

On obtient $H(-1-2\,;\sqrt{2}\,;-4+2) = H(-3\,;\sqrt{2}\,;-2)$, qui vérifie bien $-3-(-2)+1=0$.

RÉPONSE

Affirmation 4 **VRAIE** : le projeté orthogonal de S sur P est $H(-3\,;\sqrt{2}\,;-2)$.

Exercice 4 — Fonction logarithme

(6 pts)

Partie A — Lecture graphique

RAPPEL
La tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(1\,;0)$ passe par $B(0\,;-2)$.

1. Valeur de $f'(1)$
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T, qui passe par $A(1\,;0)$ et $B(0\,;-2)$:

$$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0-(-2)}{1-0} = 2.$$

RÉPONSE
$f'(1) = 2$.

2. La fonction f est-elle concave sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$?
Une fonction concave a sa courbe située *en dessous* de chacune de ses tangentes. Or au point A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente T (elle passe en dessous puis au-dessus) : A est un point d'inflexion.

RÉPONSE
Non : $\mathcal{C}$ passe au-dessus de sa tangente T à droite de A, donc f n'est pas concave sur tout l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Valeur de $f''(1)$
Au point $A(1\,;0)$, la courbe traverse sa tangente : A est un point d'inflexion, donc la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

RÉPONSE
$f''(1) = 0$.

Partie B — Étude de fonction

RAPPEL
$f(x) = x\ln(2x-1)$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

1. Limite de f en $\frac{1}{2}$
Quand $x \to \frac{1}{2}^+$: $2x-1 \to 0^+$ donc $\ln(2x-1) \to -\infty$, tandis que $x \to \frac{1}{2} > 0$. Par produit :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

RÉPONSE
$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}$.

2. Résolution de $f(x) = 0$
Sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $x > 0$ donc $x \neq 0$:

$$f(x) = 0 \iff x\ln(2x-1) = 0 \iff \ln(2x-1) = 0 \iff 2x-1 = 1 \iff x = 1.$$

RÉPONSE

L'unique solution de $f(x) = 0$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est $x = 1$.

3.a. Expression de $f''(x)$

On dérive $f'(x) = \ln(2x-1) + \dfrac{2x}{2x-1}$. La dérivée de $\ln(2x-1)$ est $\dfrac{2}{2x-1}$ et, pour le quotient $\dfrac{2x}{2x-1}$ (avec $u = 2x$, $v = 2x-1$) :

$$\left(\frac{2x}{2x-1}\right)' = \frac{2(2x-1) - 2x \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}.$$

D'où :

$$f''(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)-2}{(2x-1)^2} = \frac{4x-4}{(2x-1)^2} = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

RÉPONSE

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $f''(x) = \dfrac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.

3.b. Unique point d'inflexion

Sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $(2x-1)^2 > 0$: le signe de $f''(x)$ est celui de $4(x-1)$, donc de $(x-1)$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $x = 1$: $\mathcal{C}$ admet un **unique point d'inflexion** d'abscisse 1. Son ordonnée est $f(1) = 1 \times \ln(1) = 0$: ce point est $(1\,;0)$, qui est aussi l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses (question 2).

RÉPONSE

$\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, le point $(1\,;0)$, intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4.a. f est positive sur $[1\,;2]$

Sur $[1\,;2]$: $2x-1 \in [1\,;3]$, donc $2x-1 \geqslant 1$ et $\ln(2x-1) \geqslant 0$. De plus $x \geqslant 1 > 0$. Par produit de deux facteurs positifs :

RÉPONSE

$f(x) = x\ln(2x-1) \geqslant 0$ sur $[1\,;2]$: la fonction f est **positive** sur $[1\,;2]$.

4.b. Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

En utilisant l'égalité admise :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}\right)\mathrm{d}x.$$

On primitive terme à terme :

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln(2x-1)\right]_1^2.$$

En $x=2$: $\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\ln(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln(3)$. En $x=1$: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ln(1)=\frac{1}{2}$. Par différence :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln(3)-\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{8}\ln(3).$$

RÉPONSE

$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = 1+\frac{1}{8}\ln(3)$.

4.c. Aire $\mathcal{A}$ du domaine

MÉTHODE

Comme $f\geqslant 0$ sur $[1\,;2]$, $\mathcal{A}=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. On effectue une intégration par parties en dérivant $\ln(2x-1)$ et en primitivant x.

On pose $u(x)=\ln(2x-1)$ et $v'(x)=x$, d'où $u'(x)=\frac{2}{2x-1}$ et $v(x)=\frac{x^2}{2}$:

$$\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x-1)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\times\frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\ln(2x-1)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Le terme tout intégré vaut $\frac{4}{2}\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(1)=2\ln(3)$. Avec le résultat de la question 4.b :

$$\mathcal{A}=2\ln(3)-\left(1+\frac{1}{8}\ln(3)\right)=\left(2-\frac{1}{8}\right)\ln(3)-1=\frac{15}{8}\ln(3)-1.$$

RÉPONSE

$\mathcal{A}=\frac{15}{8}\ln(3)-1\approx 1{,}06$ unité d'aire.

Partie C — Généralisation

RAPPEL

$a>0$ et $f_a(x)=x\ln(ax-1)$ sur $\left]\frac{1}{a}\,;+\infty\right[$, avec $f_a''(x)=\frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}$.

1. Unique point d'inflexion A_a

Sur $\left]\frac{1}{a}\,;+\infty\right[$, $(ax-1)^2>0$ et $a>0$: le signe de $f_a''(x)$ est celui de $(ax-2)$.

$$f_a''(x)=0 \iff ax-2=0 \iff x=\frac{2}{a}.$$

Comme $\frac{2}{a}>\frac{1}{a}$, cette valeur appartient à l'intervalle, et f_a'' change de signe en $\frac{2}{a}$ (négative avant, positive après). La courbe $\mathcal{C}_a$ admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{2}{a}$. Son ordonnée :

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{2}{a}\ln\left(a\times\frac{2}{a}-1\right)=\frac{2}{a}\ln(1)=0.$$

RÉPONSE

Pour tout $a > 0$, $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion $A_a\left(\frac{2}{a}\,;0\right)$.

2. Les points A_a sont alignés

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$, le point $A_a\left(\frac{2}{a}\,;0\right)$ a une ordonnée nulle.

RÉPONSE

Tous les points A_a ont pour ordonnée 0 : ils appartiennent à l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$). Les points A_a sont donc **alignés**.