

Corrigé détaillé – Jour 2

Ex. 1 (4 pts) · Ex. 2 (6 pts) · Ex. 3 (5 pts) · Ex. 4 (5 pts) · 4h00

Notions abordées

Probabilités & Loi binomiale · Suites & Python · Géométrie dans l'espace · Fonctions & Intégration par parties

Exercice 1 — Probabilités (4 points)

Thème : probabilités conditionnelles, loi binomiale, inégalité de Bienaymé-Tchébychev

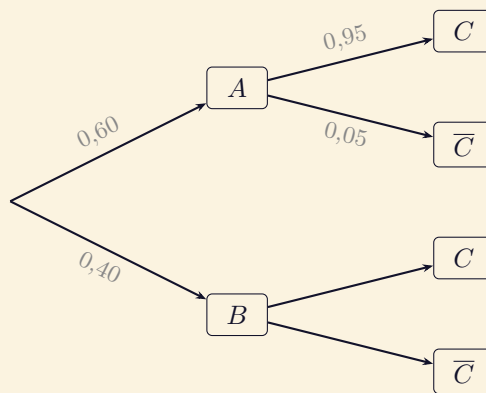
Partie A

1. Arbre pondéré des probabilités complété.

ANALYSE DES DONNÉES DE L'ÉNONCÉ

- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A : $P(A) = 0,60$.
- L'événement B est l'événement contraire de A (seulement deux fournisseurs) : $P(B) = 1 - 0,60 = 0,40$.
- Parmi les tomates de A, 95 % sont commercialisables : $P_A(C) = 0,95$. On en déduit $P_A(\bar{C}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

ARBRE DE PROBABILITÉS



2. a.. Probabilité que la tomate soit commercialisable et provienne de A.

RÉPONSE

On calcule $P(A \cap C)$:

D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$$

La probabilité que la tomate soit commercialisable et provienne du fournisseur A est de 0,57

2. b.. Démonstration que $P_B(C) = 0,85$.

RÉPONSE

Les événements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

On sait par l'énoncé que 91 % du stock total est commercialisable, soit $P(C) = 0,91$.

$$0,91 = 0,57 + P(B) \times P_B(C)$$

$$0,91 = 0,57 + 0,40 \times P_B(C) \iff 0,40 \times P_B(C) = 0,34 \iff P_B(C) = \frac{0,34}{0,40} = 0,85$$

2. c.. Le responsable a-t-il raison ?

RÉPONSE

La tomate est non commercialisable, l'événement conditionnant est donc \bar{C} . On calcule $P_{\bar{C}}(A)$ et $P_{\bar{C}}(B)$:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,91 = 0,09$$

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,60 \times 0,05}{0,09} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\bar{C}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,40 \times 0,15}{0,09} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}$$

Puisque $\frac{1}{3}$ est exactement la moitié de $\frac{2}{3}$, il y a effectivement deux fois moins de chances qu'elle provienne de A que de B. Le responsable a raison.

Partie B

1. a.. Paramètres de la loi binomiale.

RÉPONSE

On répète $n = 15$ fois de manière indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) une expérience de Bernoulli dont le succès est "la tomate est non commercialisable". La probabilité du succès est $p = 0,09$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,09$.

1. b.. Probabilité qu'exactly deux tomates soient non commercialisables.

RÉPONSE

On calcule $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} (0,09)^2 (1 - 0,09)^{15-2} = 105 \times (0,09)^2 \times (0,91)^{13} \approx 0,250$$

La probabilité qu'exactly deux tomates soient non commercialisables est d'environ 0,250 (valeur arrondie au millième).

1. c.. Probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.

RÉPONSE

On calcule $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$:

- $P(X = 0) = (0,91)^{15} \approx 0,2430$
- $P(X = 1) = 15 \times 0,09 \times (0,91)^{14} \approx 0,3606$
- $P(X = 2) \approx 0,2496$

La somme donne environ 0,853 (valeur arrondie au millième).

La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est d'environ 0,853 (valeur arrondie au millième).

MÉTHODE

On peut aussi utiliser directement la calculatrice pour calculer $P(X \leq 2)$.

2. a.. Espérance et variance de F_n .

Rappel

On a $F_n = \frac{X_n}{n}$; $E(F_n) = E(X)$ et $V(F_n) = \frac{V(X)}{n}$.

RÉPONSE

On a $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,09)$. Par la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}(n \times 0,09) = 0,09$$

$$V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}(n \times 0,09 \times (1 - 0,09)) = \frac{0,09 \times 0,91}{n} = \frac{0,0819}{n}$$

2. b.. Démonstration de l'inégalité $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.

Rappel

Inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

RÉPONSE

L'encadrement $0,04 < F_n < 0,14$ correspond à l'événement $|F_n - 0,09| < 0,05$, puisque l'espérance est centrée en 0,09. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à F_n avec $\delta = 0,05$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2}$$

Or $\frac{V(F_n)}{0,05^2} = \frac{\frac{0,0819}{n}}{0,0025} = \frac{0,0819}{0,0025 \times n} = \frac{32,76}{n}$. En passant à l'événement contraire, on obtient bien :

$$\iff 1 - P(|F_n - 0,09| < 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2}$$

$$-P(|F_n - 0,09| < 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2} - 1$$

$$\iff P(|F_n - 0,09| < 0,05) \geq 1 - \frac{0,0819}{0,05^2 n}$$

$$\iff P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$$

2. c.. Conformité de l'échantillon prélevé.

RÉPONSE

Le responsable observe une fréquence $f = \frac{55}{500} = 0,11$ de tomates non commercialisables. Pour $n = 500$, la probabilité que la fréquence appartienne à l'intervalle $]0,04; 0,14[$ est :

$$P(0,04 < F_{500} < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{500} = 1 - 0,06552 = 0,93448 > 0,93$$

Cet intervalle contient la valeur théorique avec une probabilité d'au moins 93%. Puisque $0,11 \in]0,04; 0,14[$, le résultat observé est conforme à ce que l'on pouvait attendre.

Exercice 2 — Suites (6 points)

Thème : étude de fonction, suite définie par récurrence, Python

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

1. Résolution de l'équation $f(x) = x$.

RÉPONSE

Soit l'équation $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x$ sur \mathbb{R} .

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x = 0 \iff x \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

– Soit $x = 0$.

– Soit $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff \sqrt{1+x^2} = 2$.

Comme les deux membres sont strictement positifs, on peut élever au carré :

$$1 + x^2 = 4 \iff x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

2. a.. Vérification de l'expression de $f'(x)$.

RÉPONSE

La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \sqrt{1+x^2}$. $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 + 2x^2 - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

L'expression est bien vérifiée.

2. b.. Sens de variation de la fonction f .

RÉPONSE

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, donc $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$. Ainsi, le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$ sont strictement positifs. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

1. Démonstration par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

RÉPONSE

Soit \mathcal{P}_n la propriété : " $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ ".

– Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 1$. Calculons $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. On a bien $1 \leq 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{3}$, donc $1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}$. \mathcal{P}_0 est vraie.

– Hérité : Supposons \mathcal{P}_k vraie pour un entier naturel $k \geq 0$, c'est-à-dire $1 \leq u_k \leq u_{k+1} < \sqrt{3}$. La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} (question A.2.b), elle conserve donc l'ordre des inégalités :

$$f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) < f(\sqrt{3})$$

On sait que $f(1) = \sqrt{2} \geq 1$. Par définition de la suite, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$. Enfin, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ d'après la question A.1.

L'inégalité devient : $1 \leq \sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} < \sqrt{3}$.

La propriété \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

– Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. Convergence et limite de la suite (u_n) .

RÉPONSE

Convergence : D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par $\sqrt{3}$. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie $\ell \in [1; \sqrt{3}]$.

Limite : La fonction f est continue sur \mathbb{R} . La limite ℓ doit donc vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$ d'après le théorème du point fixe.

D'après la question A.1, les solutions de cette équation sont $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

Puisque $\ell \geq 1$, la seule valeur possible est $\ell = \sqrt{3}$.

La limite de la suite (u_n) est $\ell = \sqrt{3}$.

3. a.. Nature de la suite (v_n) .

RÉPONSE

Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n . On a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2}$. Or, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$, donc $u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}$.

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3(1+u_n^2) - 4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3 + 3u_n^2 - 4u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \times \left(\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \right) = 4v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 4$. Son premier terme est $v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1^2}{3 - 1^2} =$

$$\frac{1}{2}.$$

3. b.. Expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

RÉPONSE

Pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 4^n$.

$$v_n = 0,5 \times 4^n$$

On cherche à isoler u_n dans l'égalité $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$:

$$v_n(3 - u_n^2) = u_n^2 \iff 3v_n - v_n u_n^2 = u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2 + v_n u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2(1 + v_n)$$

On en déduit $u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n}$. Puisque $u_n \geq 1 > 0$, on prend la racine positive :

$$u_n = \sqrt{\frac{3(0,5 \times 4^n)}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

Ce qui est bien la formule attendue.

3. c.. Nouvelle détermination de la limite de (u_n) .

RÉPONSE

Pour lever l'indétermination, on factorise par 4^n au dénominateur :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{4^n(4^{-n} + 0,5)}} = \sqrt{\frac{1,5}{4^{-n} + 0,5}}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1,5}{4^{-n} + 0,5} = \frac{1,5}{0 + 0,5} = 3$. Par composition avec la fonction racine carrée (qui est continue en 3), on retrouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$$

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

1. Script Python complété.

RÉPONSE

```
from math import*
def termes(p):
    u = 1 #Premier terme de rang 0
    S = 0
    L = []
    for i in range(p):
        S = S + u**2 # Ajout du terme au carré à la somme
        u = 2*u / sqrt(1 + u**2) # Calcul du terme suivant
        L.append(S) # Ajout à la liste
    return L
```

(Les lignes à compléter étaient les initialisations et la mise à jour des variables).

2. Encadrement de S_n .

RÉPONSE

L'énoncé rappelle que pour tout entier k , $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$. En élevant au carré (les termes étant positifs) : $1^2 \leq u_k^2 \leq (\sqrt{3})^2 \iff 1 \leq u_k^2 \leq 3$. En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à

$n - 1$ (soit n termes au total) :

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \leq \underbrace{u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2}_{S_n} \leq \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n \text{ fois}}$$

Ce qui démontre bien que pour tout $n \geq 1$: $n \leq S_n \leq 3n$.

3. Limites de S_n et $\frac{S_n}{n^2}$.

RÉPONSE

Limite de S_n : Puisque $S_n \geq n$ pour tout $n \geq 1$, et sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Limite de $\frac{S_n}{n^2}$: En divisant l'encadrement par n^2 ($n > 0$) :

$$\frac{n}{n^2} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3n}{n^2} \iff \frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0.$$

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace (5 points)

Thème : droite, plan, projeté orthogonal, produit scalaire, volume du tétraèdre

1. Appartenance des points C et A à la droite Δ .

RÉPONSE

La droite Δ est donnée par
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} .$$

– Pour le point $C(1; 1; 1)$:

Remplaçons les coordonnées de C dans le système :
$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \implies t = 0 \\ 1 = 1 + t \implies t = 0 \\ 1 = 1 + 2t \implies t = 0 \end{cases} .$$

Le système admet une solution unique $t = 0$, donc C appartient à Δ .

– Pour le point $A(4; 2; 2)$:

Le système donne
$$\begin{cases} 4 = 1 + 2t \\ 2 = 1 + t \end{cases} \implies \begin{cases} 2t = 3 \\ t = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 1,5 \\ t = 1 \end{cases} .$$

Les valeurs de t sont contradictoires, donc A n'appartient pas à Δ .

2. a.. Équation cartésienne du plan P .

RÉPONSE

Le plan P est perpendiculaire à Δ . Un vecteur directeur de Δ , lisible dans la représentation paramétrique, est $\vec{u}(2; 1; 2)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan P . L'équation de P est donc de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0 \quad , d \in \mathbb{R}$$

Le plan P passe par le point $A(4; 2; 2)$. Ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2(4) + 2 + 2(2) + d = 0 \iff 8 + 2 + 4 + d = 0 \iff 14 + d = 0 \iff d = -14$$

Une équation cartésienne du plan P est bien $2x + y + 2z - 14 = 0$.

2. b.. Passage du plan P par les points B et C .

RÉPONSE

– Pour $B(5; -2; 3)$: $2(5) + (-2) + 2(3) - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$. Donc B appartient à P .

– Pour $C(1; 1; 1)$: $2(1) + 1 + 2(1) - 14 = 5 - 14 = -9 \neq 0$. Donc C n'appartient pas à P .

3. a.. Projeté orthogonal D du point C sur P .

RÉPONSE

Il faut vérifier deux conditions : D appartient à P , et la droite (CD) est orthogonale à P .

– Les coordonnées de $D(3; 2; 3)$ vérifient l'équation de P : $2(3) + 2 + 2(3) - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$. Donc $D \in P$.

– Le vecteur \overrightarrow{CD} a pour coordonnées : $(3 - 1; 2 - 1; 3 - 1) = (2; 1; 2)$. On constate que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$. Le vecteur \overrightarrow{CD} est colinéaire au vecteur normal de P , donc la droite (CD) est orthogonale à P .

Conclusion : D est bien le projeté orthogonal de C sur le plan P .

3. b.. Justification de la non-coplanarité des points A , B , C et D .

RÉPONSE

Les points A , B et D appartiennent tous au plan P (vérifié précédemment). Le point C , quant à lui, n'appartient pas au plan P (question 2.b). Puisqu'un seul plan contient trois points non alignés, et que C n'est pas dans ce plan, les quatre points ne peuvent pas être dans un même plan. Ils ne sont pas coplanaires.

3. c.. Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.

RÉPONSE

Coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-2 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1 \times 1) + (0 \times (-4)) + (1 \times 1) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux. Le triangle ABD est donc rectangle en A .

3. d.. Volume du tétraèdre $ABCD$.

RÉPONSE

Prenons le triangle ABD (inclus dans le plan P) comme base du tétraèdre. Puisque le triangle est rectangle en A , son aire B est $\frac{AD \times AB}{2}$.

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$B = \frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ unités d'aire.}$$

La hauteur relative à cette base est la distance du sommet C au plan P .

Puisque D est le projeté orthogonal de C sur P , cette hauteur est la longueur CD .

$$h = CD = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Le volume est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3 \text{ unités de volume.}$$

4. a.. Vérification des coordonnées du point H .

RÉPONSE

Pour prouver que $H \left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29} \right)$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) , il faut vérifier que $H \in (BC)$ et que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$- \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5-1 \\ -2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$- \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{73}{29}-1 \\ \frac{-4}{29}-1 \\ \frac{51}{29}-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{44}{29} \\ \frac{-33}{29} \\ \frac{22}{29} \end{pmatrix} = \frac{11}{29} \overrightarrow{BC}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires, donc H appartient à la droite (BC) .

$$- \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 4 \\ \frac{-4}{29} - 2 \\ \frac{51}{29} - 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{-43}{29} \\ \frac{-62}{29} \\ \frac{-7}{29} \end{pmatrix}.$$

$$- \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{-43 \times 4 + (-62) \times (-3) + (-7) \times 2}{29} = \frac{-172 + 186 - 14}{29} = \frac{0}{29} = 0.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux.

H est bien le projeté orthogonal de A sur (BC) .

4. b.. Calcul de l'aire du triangle ABC .

RÉPONSE

Dans le triangle ABC , la hauteur issue de A est la longueur AH . La base correspondante est BC .

$$BC = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{-43}{29}\right)^2 + \left(\frac{-62}{29}\right)^2 + \left(\frac{-7}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{1849 + 3844 + 49}}{29} = \frac{\sqrt{5742}}{29}$$

On remarque que $5742 = 29 \times 198$. Donc $AH = \frac{\sqrt{29} \times \sqrt{198}}{29} = \frac{\sqrt{198}}{\sqrt{29}}$.

L'aire est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{\sqrt{198}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{198}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 22}}{2} = \frac{3\sqrt{22}}{2} \text{ u.a.}$$

4. c.. Dédution de la distance du point D au plan (ABC) .

RÉPONSE

Le tétraèdre $ABCD$ (qui a un volume de 3) peut être considéré avec la base ABC et pour hauteur h' , la distance de D au plan (ABC) .

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times h'$$

$$3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d(D, (ABC)) \iff 3 = \frac{\sqrt{22}}{2} \times d(D, (ABC))$$

$$d(D, (ABC)) = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{22} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

Exercice 4 — Analyse (5 points)

Thème : fonction logarithme, limites, dérivée, TVI, intégration par parties

1. Limite de la fonction f en $+\infty$.

RÉPONSE

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$.

Par conséquent, par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a.. Démonstration de $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.

RÉPONSE

La fonction g est définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = x \ln x$. Calculons $4(g(\sqrt{x}))^2$:

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = 4\left(\sqrt{x} \times \frac{1}{2} \ln x\right)^2$$

On utilise la propriété $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$. En élevant au carré :

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4\left(x \times \frac{1}{4} (\ln x)^2\right) = 4 \times \frac{1}{4} \times x(\ln x)^2 = x(\ln x)^2 = f(x)$$

L'égalité est bien démontrée.

2. b.. Limite de $f(x)$ en 0.

RÉPONSE

Étudions d'abord la limite de $g(\sqrt{x})$ en 0.

On pose $X = \sqrt{x}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow 0$.

Par croissances comparées, on sait que $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(\sqrt{x}) = 0$ par composition.

Par produit (la fonction carrée étant continue en 0), on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(\sqrt{x}))^2 = 0^2 = 0.$$

Finalement, par produit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

3. a.. Expression de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

RÉPONSE

La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2$. On a $u'(x) = 1$ et, par la formule de dérivation d'une puissance, $v'(x) = 2(\ln x)'(\ln x)^1 = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$.

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \left(2 \frac{\ln x}{x}\right) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$$

En factorisant par $\ln x$, on obtient bien : $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.

3. b.. Variations de f sur $]0; +\infty[$.

RÉPONSE

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe du produit de $\ln x$ et de $2 + \ln x$.

$$- \ln x \geq 0 \iff x \geq 1$$

$$- 2 + \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -2 \iff x \geq e^{-2}$$

On dresse le tableau de signes :

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$2 + \ln x$		-	0	+
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$

- f est strictement croissante sur $]0; e^{-2}]$ et sur $[1; +\infty[$.

- f est strictement décroissante sur $[e^{-2}; 1]$.

3. c.. Valeur exacte du maximum de f sur $]0; 1]$.

RÉPONSE

D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $]0; 1]$, la fonction f admet un maximum local en $x = e^{-2}$. On calcule sa valeur :

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

Le maximum exact est $\frac{4}{e^2}$.

4. a.. Justification de l'unique solution de $f(x) = 2$.

RÉPONSE

- Sur l'intervalle $]0; 1]$, le maximum de la fonction est $\frac{4}{e^2} \approx \frac{4}{7,389} \approx 0,54$. Toutes les valeurs de $f(x)$ sont strictement inférieures à 2. L'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

- Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Le nombre 2 est compris entre 0 et $+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

4. b.. Encadrement de α d'amplitude 0,1.

RÉPONSE

À l'aide de la calculatrice, on effectue un balayage : $f(2,4) \approx 1,84 < 2$ $f(2,5) \approx 2,10 > 2$ On en déduit l'encadrement : $2,4 < \alpha < 2,5$.

5. a.. Interprétation géométrique de l'intégrale.

RÉPONSE

La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[a; 1]$ (puisque $a \in]0; 1]$). L'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$ représente l'aire (en unités d'aire) du domaine du plan délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations verticales $x = a$ et $x = 1$.

5. b.. Intégration par parties pour $\int_a^1 f(x)dx$.

RÉPONSE

On calcule $\int_a^1 x(\ln x)^2 dx$.

On pose : $u(x) = (\ln x)^2 \implies u'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$ et $v'(x) = x \implies v(x) = \frac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; 1]$. Les fonctions u' et v' sont continues sur $]0; 1]$.

Par la formule d'intégration par parties $\int_a^1 uv' = [uv]_a^1 - \int_a^1 u'v$:

$$\int_a^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \left(2\frac{\ln x}{x} \times \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\int_a^1 f(x)dx = \left(\frac{1^2}{2} (\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 \right) - \int_a^1 x \ln x dx = 0 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$

En utilisant la propriété d'inversion des bornes $\int_a^1 = -\int_1^a$, on a $-\int_a^1 x \ln x dx = \int_1^a x \ln x dx$. En gardant l'inversion des bornes, on a le résultat de l'énoncé :

$$\int_a^1 f(x)dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx$$

5. c.. Seconde intégration par parties.

RÉPONSE

On calcule l'intégrale $\int_1^a x \ln x dx$. On pose : $u(x) = \ln x \implies u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = x \implies v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\int_1^a x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^a - \int_1^a \frac{x}{2} dx = \left(\frac{a^2}{2} \ln a - 0 \right) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^a$$

$$\int_1^a x \ln x dx = \frac{a^2}{2} \ln a - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$$

On substitue ce résultat dans l'égalité trouvée à la question 5.b :

$$\int_a^1 f(x)dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \left(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\int_a^1 f(x)dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

5. d.. Limite de l'intégrale quand a tend vers 0.

RÉPONSE

Par croissances comparées, on sait que $\lim_{a \rightarrow 0} a \ln a = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0} a(\ln a)^2 = 0$. Par produit avec $\frac{a}{2}$, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2} \ln a = 0$. De plus $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{4} = 0$. Par somme des limites :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \text{ unités d'aire.}$$