BACCALAURÉAT GÉNÉRAL · MATHÉMATIQUES · AMÉRIQUE DU NORD · 2026

Corrigé détaillé

Ex. 1 (6 pts) · Ex. 2 (4 pts) · Ex. 3 (5 pts) · Ex. 4 (5 pts) · 4h00

Barême possible

Probabilités · Suites & éq. diff. · Géométrie dans l'espace · Analyse (ln)

Exercice 1 — Probabilités (6 points)

Thème : abonnements musicaux — probabilités conditionnelles, loi binomiale, espérance, inégalité de Bienaymé-Tchébychev

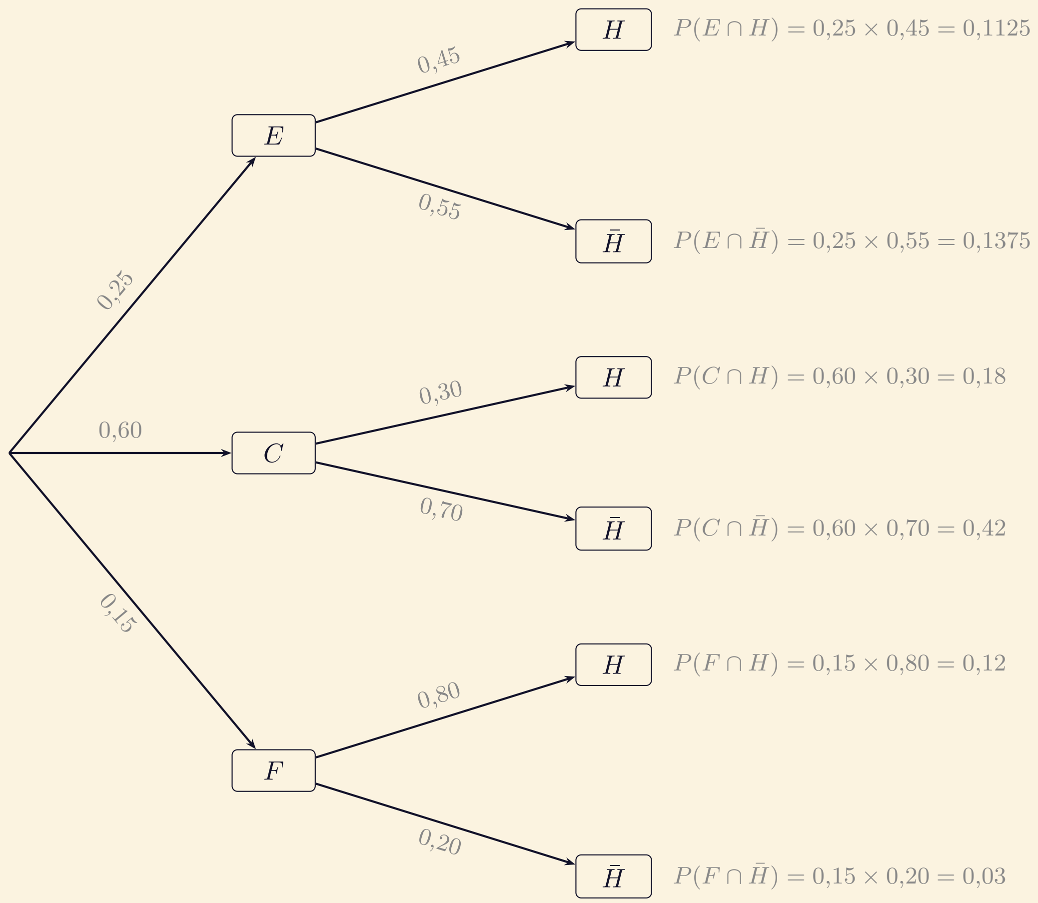
Partie A

1. Arbre de probabilités complété. (2 pts)

Données récapitulées :

- $P(E) = 0{,}25$; $P(F) = 0{,}15$; $P(C) = 1 - 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}60$
- $P_E(H) = 0{,}45$; $P_E(\bar{H}) = 0{,}55$
- $P_C(H) = 0{,}30$; $P_C(\bar{H}) = 0{,}70$
- $P(F \cap H) = 0{,}12$ et $P(F) = 0{,}15$, donc $P_F(H) = \dfrac{0{,}12}{0{,}15} = 0{,}80$; $P_F(\bar{H}) = 0{,}20$

ARBRE DE PROBABILITÉS



2. Calcul de $P(E \cap H)$. (1 pts)

RÉPONSE

D'après la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0{,}25 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}1125}$$

3. Démonstration que $P(H) = 0{,}4125$. (1 pts)

RÉPONSE

Les événements E, C, F forment une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$$

$$P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0{,}60 \times 0{,}30 = 0{,}18$$

$$P(F \cap H) = P(F) \times P_F(H) = 0{,}15 \times 0{,}80 = 0{,}12$$

$$P(H) = 0{,}1125 + 0{,}18 + 0{,}12 = \ 0{,}4125 \checkmark$$

4. Probabilité conditionnelle $P_H(E)$. (1 pts)

RÉPONSE

Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}1125}{0{,}4125} = \frac{1125}{4125} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11} \approx \ 0{,}273$$

Partie B — Loi binomiale

1. Paramètres de la loi binomiale de X. (0,5 pts)

RÉPONSE

On répète 8 fois de manière identique et indépendante une expérience à deux issues dont le succès est : "l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne » ". La probabilité du succès est $p = 0{,}4125$.

X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 8$ et $p = 0{,}4125$.
On note $X \sim \mathcal{B}(8\,;\,0{,}4125)$.

2. Probabilité $P(X = 0)$. (0,5 pts) La probabilité qu'aucun abonné n'est activé l'option « Écoute hors-ligne » est $P(X = 0)$.

RÉPONSE

$$P(X = 0) = \binom{8}{0}(0{,}4125)^0(1 - 0{,}4125)^8 = (0{,}5875)^8$$

$$P(X = 0) \approx \ 0{,}014$$

La probabilité qu'aucun abonné n'est activé l'option « Écoute hors-ligne » est d'environ 0,014.

3. Étude de q_n.
   a. Démonstration de $q_n = 1 - 0{,}5875^n$. (0,5 pts)

RÉPONSE

q_n est la probabilité qu'au moins un abonné dans un échantillon de n ait activé l'option.

L'événement contraire est « aucun des n abonnés n'a activé l'option ». Sa probabilité est $1 - q_n$

$$1 - q_n = \binom{n}{0}(0{,}4125)^0(1 - 0{,}4125)^n$$

$$1 - q_n = (1 - 0{,}4125)^n$$

$$q_n = 1 - (1 - 0{,}4125)^n$$

$$\boxed{q_n = 1 - 0{,}5875^n}\checkmark$$

b. Plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0{,}999$. (0,5 pts)

RÉPONSE

On résout $q_n \geq 0{,}999$:

$$1 - 0{,}5875^n \geq 0{,}999 \iff 0{,}5875^n \leq 0{,}001 \iff n\ln(0{,}5875) \leq \ln(0{,}001)$$

Puisque $\ln(0{,}5875) < 0$, on divise en changeant le sens :

$$n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5875)} = \frac{-6{,}9078\ldots}{-0{,}5318\ldots} \approx 12{,}99$$

La plus petite valeur entière est donc : $n = 13$.

Vérification : $q_{12} = 1 - 0{,}5875^{12} \approx 1 - 0{,}001005 \approx 0{,}9990 < 0{,}999$; $q_{13} \approx 1 - 0{,}000591 \approx 0{,}9994 \geq 0{,}999$ ✓.

Partie C — Variable aléatoire du montant mensuel

1. Six valeurs possibles de Y. (0,5 pts)

RÉPONSE

Abonnement	Option hors-ligne	Montant Y	Événement
Étudiant (5 €)	Non	5 €	$E \cap \bar{H}$
Étudiant (5 €)	Oui (+2 €)	7 €	$E \cap H$
Classique (10 €)	Non	10 €	$C \cap \bar{H}$
Classique (10 €)	Oui (+2 €)	12 €	$C \cap H$
Famille (16 €)	Non	16 €	$F \cap \bar{H}$
Famille (16 €)	Oui (+2 €)	18 €	$F \cap H$

Les six valeurs possibles sont $Y \in \{5\,;\,7\,;\,10\,;\,12\,;\,16\,;\,18\}$.

2. Loi de probabilité de Y. (0,5 pts)

RÉPONSE

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	$0{,}25 \times 0{,}55$	$0{,}25 \times 0{,}45$	$0{,}60 \times 0{,}70$	$0{,}60 \times 0{,}30$	$0{,}15 \times 0{,}20$	0,12
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

Vérification : $0{,}1375 + 0{,}1125 + 0{,}42 + 0{,}18 + 0{,}03 + 0{,}12 = 1$ ✓

3. Démonstration de $E(Y) = 10{,}475$ et interprétation. (1 pts)

RÉPONSE

$$\begin{aligned} E(Y) &= 5 \times 0{,}1375 + 7 \times 0{,}1125 + 10 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}18 + 16 \times 0{,}03 + 18 \times 0{,}12 \\ &= 0{,}6875 + 0{,}7875 + 4{,}2 + 2{,}16 + 0{,}48 + 2{,}16 = 10{,}475 \checkmark \end{aligned}$$

Interprétation : En moyenne, un abonné pris au hasard sur cette plateforme paie 10,475 € par mois. Si l'on interroge un grand nombre d'abonnés, la moyenne des montants observés sera très proche de 10,475 €.

4. Variance de Y (à la calculatrice). (0,5 pts)

RÉPONSE

$$E(Y^2) = 25 \times 0{,}1375 + 49 \times 0{,}1125 + 100 \times 0{,}42 + 144 \times 0{,}18 + 256 \times 0{,}03 + 324 \times 0{,}12$$

$$= 3{,}4375 + 5{,}5125 + 42 + 25{,}92 + 7{,}68 + 38{,}88 = 123{,}43$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 123{,}43 - (10{,}475)^2 = 123{,}43 - 109{,}7256 \approx 13{,}70$$

5. Plateforme vidéo — variable Z ($E(Z) = 9$, $\sigma(Z) = 2$).
   a. Variance de Z. (0,25 pts)

RÉPONSE

$V(Z) = \sigma(Z)^2 = 2^2 = 4$

   b. Au moins 50 % de chances que $Z \in]6\,;\,12[$ — justification. (0,75 pts)

INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHÉBYCHEV

Pour toute variable aléatoire Z d'espérance μ et de variance σ^2, et pour tout réel $k > 0$:

$$P(|Z - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad P(|Z - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

RÉPONSE

L'intervalle $]6\,;\,12[$ est centré en $E(Z) = 9$, avec une demi-largeur $k = 3$.

$$P(6 < Z < 12) = P(|Z - 9| < 3) \geq 1 - \frac{V(Z)}{\delta^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$$

Comme $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev garantit bien qu'il y a au moins 50 % de chances que le prix de l'abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 €. L'affirmation du responsable est justifiée.

Exercice 2 — Suites et équations différentielles (4 points)

Thème : perche-soleil — modèle discret (suite récurrente) et modèle continu (éq. diff.)

Partie A — Modèle discret

1. Nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026. (0,5 pts)

RÉPONSE

$n = 1$ correspond au 1er janvier 2026.

$$u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = \ 3$$

Le modèle prévoit 3 000 perches-soleil au 1er janvier 2026.

2. Étude de la fonction $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$ et convergence de (u_n).

a. Monotonie de h sur $]0\,;+\infty[$. (0,5 pts)

RÉPONSE

h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comem somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{4}{x^2}$$

Ainsi $h'(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$. Donc h est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b. Démonstration que pour tout entier $n \geq 0$: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$. (1 pts)

RÉPONSE

On procède par récurrence.

Initialisation $(n = 0)$: $u_0 = 4$, $u_1 = 3$.

$$2 \leq 3 \leq 4 \leq 4$$

$$2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$$

La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ pour un entier naturel n. Montrons $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

la fonction h étant croissante sur $]0;+\infty[$:

$$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$$

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \text{ et } h(4) = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.
Conclusion :

Par principe de récurrence, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \geq 0$.

c. Convergence de (u_n). (0,25 pts)

RÉPONSE

La suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 2 (car $u_n \geq 2$ pour tout n). Par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

d. Justification de $\ell = 2$. (0,25 pts)

RÉPONSE

La suite (u_n) converge vers ℓ.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$$

$$u_0 \in]0; +\infty[$$

$$\forall x > 0, \text{ h est continue et } h(x) > 0$$

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de (u_n) est solution de l'équation $h(x) = x$

$$\ell = 4 - \frac{4}{\ell} \implies \ell^2 = 4\ell - 4 \implies \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \implies (\ell - 2)^2 = 0 \implies \ell = 2$$

e. Le modèle prédit-il une élimination à long terme ? (0,25 pts)

RÉPONSE

$\ell = 2$ signifie que la suite (u_n) tend vers 2, c'est-à-dire que la population tend vers 2 000 perches-soleil.

Non, ce modèle ne prédit pas une élimination à long terme : la population se stabilise à un seuil positif de 2 000 individus, sans jamais s'annuler.

3. Script Python.

a. Complétion du script. (0,5 pts)

RÉPONSE

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4/u
        n = n + 1
    return n
```

Logique : la boucle calcule les termes successifs de (u_n) et incrémente n tant que $u \geq s$. Dès que $u_n < s$, la boucle s'arrête et renvoie n (le premier indice tel que $u_n < s$).

b. Valeur renvoyée par population(2.2) — interprétation. (0,25 pts)

RÉPONSE

On calcule les premiers termes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	4	3	$\frac{8}{3}$	2,5	2,4	$\frac{7}{3}$	$\frac{16}{7}$	2,25	$\frac{20}{9}$	2,2
$u_n \geq 2{,}2$?	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

$u_{10} = 4 - 4/2{,}2 = 4 - \frac{20}{11} = \frac{24}{11} \approx 2{,}182 < 2{,}2$.

La boucle s'arrête donc à $n = 10$: population(2.2) renvoie $\boxed{10}$.

Interprétation : La population sera pour la première fois inférieure à 2 200 perches-soleil au 1er janvier 2035 (soit $n = 10$, donc 10 ans après 2025).

Partie B — Modèle continu

1. Ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2$. (0,5 pts)

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 1er ORDRE

Les solutions de $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$, b constante) sont de la forme :

$$y(t) = C\,e^{-at} + \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

RÉPONSE

Solution homogène : $y' + y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : la constante $y = 2$ convient $(0 + 2 = 2\ \checkmark)$.

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{t \mapsto Ce^{-t} + 2 \mid C \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Expression de $p(t)$. (0,5 pts)

RÉPONSE

p est solution de (E), donc $p(t) = Ce^{-t} + 2$. La condition initiale donne :

$$p(0) = Ce^{0} + 2 = C + 2 = 4 \implies C = 2$$

$$p(t) = 2e^{-t} + 2$$

3. Le modèle continu prédit-il une élimination à long terme ? (0,5 pts)

RÉPONSE

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty} (2e^{-t} + 2) = 0 + 2 = 2$$

La population tend vers 2 milliers d'individus quand $t \to +\infty$.

Non, le modèle continu ne prédit pas non plus d'élimination : la population se stabilise asymptotiquement à 2 000 perches-soleil. Ce résultat est cohérent avec celui du modèle discret $(\ell = 2)$.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace (5 points)

Thème : pyramide à base carrée SABCD — produit scalaire, plan, distance point-plan

COORDONNÉES DES POINTS

Repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ où I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[OS]$. Les coordonnées données : $B(-1;1;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$, $O(0;0;0)$.

Partie A — Produit scalaire et angle

1. Coordonnées de A et D. (0,5 pts)

RÉPONSE

$$A(-1;-1;0) \quad \text{et} \quad D(1;-1;0)$$

2. Calcul de $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$. (1 pts)

RÉPONSE

$$\overrightarrow{SC}(1-0\,;\,1-0\,;\,0-2) \quad \overrightarrow{SC}(1\,;\,1\,;\,-2)$$
$$\overrightarrow{SB}(-1-0\,;\,1-0\,;\,0-2) \quad \overrightarrow{SC}(-1\,;\,1\,;\,-2)$$
$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = (1)(-1) + (1)(1) + (-2)(-2) = -1 + 1 + 4 = \ 4$$

3. Mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ au dixième de degré près. (0,5 pts)

RÉPONSE

$$||\overrightarrow{SC}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \quad ; \quad ||\overrightarrow{SB}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$
$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SC}|\,|\overrightarrow{SB}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\widehat{BSC} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx \ 48{,}2^o$$

Partie B — Distance du point O au plan (SBC) par les vecteurs

1. Vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

   a. Justification que $\vec{n}$ est normal à (SBC). (0,5 pts)

RÉPONSE

On vérifie que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0 \checkmark$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0 \checkmark$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (SBC), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (SBC).

   b. Équation cartésienne $2y + z - 2 = 0$. (0,5 pts)

RÉPONSE

Le plan (SBC) passe par $S(0;0;2)$ de vecteur normal $(0;2;1)$. Son équation est :

$$0x + 2y + 1z + d = 0 \iff 2y + z + d = 0 \text{ avec } d \text{ un réel.}$$

S vérifie l'équation du plan :

$$2 + d = 0 \iff d = -2$$

Une équation cartésienne du plan (SBC) est : $2y + z - 2 = 0$.

2. Projeté orthogonal H de O sur (SBC).

a. Représentation paramétrique de (OH). (0,25 pts)

RÉPONSE

La droite (OH) passe par $O(0;0;0)$ et est dirigée par le vecteur normal $\vec{n} = (0;2;1)$:

$$(OH) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b. Coordonnées de H. (0,5 pts)

RÉPONSE

H est l'intersection de (OH) avec le plan $2y + z - 2 = 0$. On substitue :

$$2(2t) + t - 2 = 0 \iff 5t = 2 \iff t = \frac{2}{5}$$

En remplaçant t dans la représentation parmétrique de (OH), on a :

$$H\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right)$$

c. Distance de O au plan (SBC). (0,5 pts)

RÉPONSE

H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC). Donc la distance du point O au plan (SBC) est OH.

$$d(O,(SBC)) = OH = \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

Partie C — Distance par le volume

1. Volumes.

a. Volume de la pyramide $SABCD$. (0,5 pts)

RÉPONSE

La base $ABCD$ est un carré de côté $AB = 2$: $\mathcal{A}_{\text{base}} = 4 \text{ cm}^2$.
La hauteur est $OS = 2$ cm (S est à la verticale de O).

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \text{ cm}^3$$

b. Volume de la pyramide $OCBS$. (0,5 pts)

RÉPONSE

La pyramide $SABCD$ peut être décomposée en 4 pyramides égales de sommet O et de base un triangle : OAB, OBC, OCD, ODA.

$$V_{OCBS} = \frac{1}{4} \times V_{SABCD} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}\ \text{cm}^3\ \checkmark$$

2. Aire du triangle SBC. (0,5 pts)

RÉPONSE

Dans le triangle OJS rectangle en S on a d'après le théorème de Pythagore :

$$SJ^2 = OS^2 + OJ^2$$
$$SJ^2 = 2^2 + 1^2$$
$$SJ^2 = 5$$
$$SJ = \sqrt{5}\ \text{cm}.$$

Ainsi l'aire du tiangle SBC est : :

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{SJ \times BC}{2}$$
$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{\sqrt{5} \times 2}{2}$$
$$\mathcal{A}_{SBC} = \sqrt{5}\ cm^2$$

3. Déduction de la distance $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm. (0,5 pts)

RÉPONSE

On sait que H est le projeté orthogonal de O dans (SBC) donc OH est la hauteur de la pyramide de base SBC. On exprime le volume de la pyramide $OCBS$ de deux manières :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times OH)$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times OH)$$
$$OH = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}\checkmark$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat : $OH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}894$ cm.

Exercice 4 — Analyse (5 points)

Thème : $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$ — convexité, limites, dérivée, variations, tangente

1. Conjecture graphique (convexité/concavité). (0,5 pts)

RÉPONSE

D'après la représentation graphique :

– La courbe semble convexe ($\cup$) sur $]-\infty\,;1[$ (courbure tournée vers le bas de l'axe).

– La courbe semble concave ($\cap$) sur $]1\,;+\infty[$.

2. Limite de f en $-\infty$. (0,5 pts)

RÉPONSE

Quand $x \to -\infty$:

– $x^2 \to +\infty$ donc $\ln(x^2+1) \to +\infty$, donc $5\ln(x^2+1) \to +\infty$

– $-3x \to +\infty$ (car $x \to -\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty + \infty = \ +\infty$$

3. Limite de f en $+\infty$.

a. Vérification de l'égalité. (0,5 pts)

RÉPONSE

Pour $x > 0$: $x^2+1 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc :

$$\ln(x^2+1) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = 5\left(2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x$$

$$f(x) = 10\ln x - 3x + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = x\left(\frac{10\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Ce qui est bien l'expression annoncée. ✓

b. Limite en $+\infty$. (0,5 pts)

RÉPONSE

Quand $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10\ln x}{x} = 0 \quad \text{(par croissances comparées)} \implies \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{10\ln x}{x} - 3\right) = -3 \quad \text{(par somme).}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{(par somme).}$$

$$\lim_{X\to1} \ln(X) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{(par composée).}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{(par produit et somme).}$$

4. Étude des variations de f.

   a. Démonstration que $f'(x) = \dfrac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$. (0,5 pts)

RÉPONSE

f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 5 \times \frac{(2x}{x^2+1} - 3 = \frac{10x}{x^2+1} - 3 = \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$$

   b. Tableau de variations de f. (1 pts)

RÉPONSE

Signe du numérateur $g(x) = -3x^2 + 10x - 3$:
$\Delta = 100 - 36 = 64 = 8^2$; racines : $x_1 = \dfrac{10-8}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{10+8}{6} = 3$.
Comme le coefficient de x^2 est $-3 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines.
Le dénominateur $x^2 + 1 > 0$ pour tout x.

Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$5\ln\left(\frac{10}{9}\right) - 1$	↗	$5\ln 10 - 9$	↘	$-\infty$

- f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$.
- f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,3\right]$.
- f est décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$.
- Minimum local en $x = \dfrac{1}{3}$: $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 5\ln\dfrac{10}{9} - 1 \approx -0{,}47$.
- Maximum local en $x = 3$: $f(3) = 5\ln 10 - 9 \approx 2{,}51$.

5. Dérivée seconde et tangente.

   a. Validation de la conjecture. (0,5 pts)

RÉPONSE

$f''(x) = \dfrac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$. Le signe de f'' est celui de $-10(x^2-1) = -10(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f''(x) > 0$ pour $x \in]-1\,;\,1[\Rightarrow f$ est convexe sur $]-1\,;\,1[$.
- $f''(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[\Rightarrow f$ est concave sur ces intervalles.

On remarque que la fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,-1]$ ce qui n'était pas visible sur la représentation graphique. La conjecture de la question 1 est rejetée.

b. Équation réduite de la tangente en A d'abscisse 1. (0,5 pts)

RÉPONSE

A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 :

$$f(1) = 5\ln(1+1) - 3 = 5\ln 2 - 3$$

$$f'(1) = \frac{-3+10-3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

L'équation de la tangente en A est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 5\ln 2 - 3 = 2x - 2 + 5\ln 2 - 3$$

$$y = 2x + 5\ln 2 - 5$$

c. Démonstration que pour tout $x \geq 1$: $\ln(x^2+1) \leq x + \ln 2 - 1$. (0,5 pts)

RÉPONSE

Puisque f est concave sur $[1;+\infty[$ ($f'' < 0$ pour $x > 1$), la tangente en A est au-dessus de la courbe de f pour $x \geq 1$.

Pour tout $x \geq 1$:

$$f(x) \leq 2x + 5\ln 2 - 5$$

$$5\ln(x^2+1) - 3x \leq 2x + 5\ln 2 - 5$$

$$5\ln(x^2+1) \leq 5x + 5\ln 2 - 5$$

$$\ln(x^2+1) \leq x + \ln 2 - 1$$

