Exercice 1 – Pertes d'énergie dans le réseau électrique

(4 pts)

Partie 1

Question 1

Graphiquement, on lit l'amplitude maximale sur l'axe des ordonnées.

RÉPONSE

$$U_{max} = 6\,\mathrm{V}$$

D'après la relation $U_{eff} = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$U_{eff} = \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4{,}2 \text{ V}$$

RÉPONSE

$$U_{eff} \approx 4{,}2\,\mathrm{V}$$

Question 2

RAPPEL DE COURS

La puissance apparente est définie par :

$$S = U_{eff} \times I_{eff}$$

RÉPONSE

Avec $U_{eff} = 4{,}2\,\mathrm{V}$ et $I_{eff} = 3{,}5 \times 10^{-3}$ A :

$$S = 4{,}2 \times 3{,}5 \times 10^{-3} = 1{,}47 \times 10^{-2} \text{ VA} \approx 1{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{VA}$$

Question 3

RAPPEL DE COURS

Le facteur de puissance est $k = \dfrac{P}{S}$.

RÉPONSE

Avec $P = 1{,}2 \times 10^{-2}$ W et $S = 1{,}4 \times 10^{-2}$ VA :

$$k = \frac{1{,}2 \times 10^{-2}}{1{,}4 \times 10^{-2}} \approx 0{,}86$$

Question 4

RAPPEL DE COURS

L'énergie (en J) est $E = P \times \Delta t$, avec P en W et Δt en s.

Une minute correspond à $\Delta t = 60\,\mathrm{s}$, donc :

$$E = 1{,}2 \times 10^{-2} \times 60$$

RÉPONSE

$$E = 0{,}72\text{ J}$$

Question 5

Les pertes Joule dans les lignes sont proportionnelles à I_{eff}^2. Pour diminuer ces pertes sans modifier la puissance active reçue ($P = k \cdot S = k \cdot U_{eff} I_{eff}$), il faut *augmenter* k pour que l'intensité efficace soit plus faible.

RÉPONSE

Il faut **augmenter** la valeur du facteur de puissance k (en se rapprochant de 1), ce qui réduit l'intensité efficace circulant dans les lignes et donc les pertes par effet Joule.

Partie 2

Question 6

On calcule la dérivée de $F(t)$ sur $[0\,;+\infty[$. On rappelle que $\frac{d}{dt}[\cos(\omega t)] = -\omega \sin(\omega t)$.

$$F'(t) = 12{,}25 + \frac{13{,}91}{12\,466} \times 12\,466 \times \big(-\sin(12\,466\,t)\big)$$

$$F'(t) = 12{,}25 - 13{,}91 \sin(12\,466\,t) = f(t)$$

RÉPONSE

$F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, donc F est bien une primitive de f sur cet intervalle.

Question 7

RAPPEL DE COURS

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

RÉPONSE

$$\begin{aligned}
E_{mod} &= \int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t = F(60) - F(0) \\
&= \left[12{,}25 \times 60 + \frac{13{,}91}{12\,466}\cos(12\,466 \times 60)\right] - \left[12{,}25 \times 0 + \frac{13{,}91}{12\,466}\cos(0)\right] \\
&= 735 + \frac{13{,}91}{12\,466}\cos(747\,960) - \frac{13{,}91}{12\,466} \times 1 \\
&\approx 735 + 1{,}115 \times 10^{-3}\cos(747\,960) - 1{,}115 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Les deux termes en cosinus sont négligeables devant 735 ($\leq 1{,}1 \times 10^{-3}$).

$$\boxed{E_{mod} \approx 735\,\text{mJ}}$$

Question 8

On dispose de $E = 0{,}72$ J $= 720$ mJ, $E_{mod} = 735$ mJ et $u(E) = 10\,\text{mJ}$.

$$z = \frac{|E - E_{mod}|}{u(E)} = \frac{|720 - 735|}{10} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

RÉPONSE

$z = 1{,}5$. Comme $z < 2$, l'écart entre la valeur mesurée et la valeur modélisée est inférieur à deux incertitudes types : **le modèle est en accord avec la mesure expérimentale**.

Exercice 2 – La flamme des jeux olympiques

(6 pts)

Partie 1 – La flamme olympique

Question 1

La combustion complète du propane C_3H_8 dans le dioxygène produit du dioxyde de carbone et de l'eau.

RÉPONSE

$$C_3H_8(g) + 5\ O_2(g) \longrightarrow 3\ CO_2(g) + 4\ H_2O\,(l)$$

Question 2

RAPPEL DE COURS

L'énergie thermique reçue par une masse m d'eau est :

$$E_{th} = m_{eau} \times c_{eau} \times \Delta\theta$$

avec $\Delta\theta$ la variation de température en K (ou en °C).

On calcule d'abord la masse d'eau :

$$m_{eau} = \rho_{eau} \times V_{eau} = 1{,}00 \text{ g/mL} \times 100 \text{ mL} = 100 \text{ g} = 0{,}100 \text{ kg}$$

La variation de température est :

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = 44{,}5 - 21{,}3 = 23{,}2 \text{ K}$$

RÉPONSE

$$E_{th} = 0{,}100 \times 4{,}18 \times 10^3 \times 23{,}2 = 9{,}698 \times 10^3 \text{ J} \approx 9{,}70\,\mathrm{kJ}$$

Question 3

La masse de paraffine consommée est :

$$\Delta m = m_i - m_f = 11{,}74 - 11{,}43 = 0{,}31 \text{ g} = 3{,}1 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

Le pouvoir calorifique est l'énergie libérée par unité de masse de combustible. En supposant que toute l'énergie de combustion est transmise à l'eau :

RÉPONSE

$$PC = \frac{E_{th}}{\Delta m} = \frac{9{,}70 \times 10^3}{3{,}1 \times 10^{-4}} \approx 3{,}13 \times 10^7 \text{ J}\,\text{kg}^{-1} = 3{,}13 \times 10^4\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$$

Question 4

RÉPONSE

L'hypothèse que *toute* l'énergie de combustion est transmise à l'eau n'est pas vérifiée en pratique. Une partie de l'énergie est dissipée par :

- convection thermique avec l'air ambiant autour de la canette ;
- rayonnement thermique de la flamme vers l'environnement.

L'énergie réellement reçue par l'eau est donc inférieure à celle libérée par la combustion, ce qui conduit à **sous-estimer** le pouvoir calorifique mesuré par rapport à la valeur réelle.

Question 5

Convertissons les valeurs dans la même unité :

$$PC_{\text{propane}} = 12{,}8\ \text{kWh}\,\text{kg}^{-1} \times 3{,}6 \times 10^3\ \text{kJ}\,\text{kWh}^{-1} = 4{,}61 \times 10^4\ \text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$$
$$PC_{\text{paraffine (littérature)}} \approx 4{,}0 \times 10^4\ \text{kJ}\,\text{kg}^{-1}$$

RÉPONSE

Le pouvoir calorifique du propane ($\approx 4{,}6 \times 10^4$ kJ kg^{-1}) est **supérieur** à celui de la paraffine ($\approx 4{,}0 \times 10^4$ kJ kg^{-1}).
Le propane libère davantage d'énergie par kg de combustible. Il produit une flamme plus chaude et plus intense, ce qui lui permet de résister aux aléas météorologiques (vent, pluie) mieux que la paraffine : ce choix est donc **pertinent** pour alimenter la torche olympique exposée aux intempéries.

Partie 2 – La vasque olympique

Question 6

RÉPONSE

D'après le graphique de la figure 2, l'altitude y varie **linéairement** en fonction du temps t (les points sont alignés). La pente de la droite est constante, ce qui signifie que la vitesse $v = \Delta y/\Delta t$ est **constante** au cours de l'ascension.

Question 7

On lit sur le graphique deux points alignés, par exemple $(0\,;\,0)$ et $(100\,;\,60)$:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{60-0}{100-0} = 0{,}60\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

RÉPONSE

$$v = 0{,}60\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Question 8

La durée totale de l'ascension est $\Delta t = 1$ min 30 s $= 90$ s. Le mouvement est rectiligne uniforme, donc :

RÉPONSE

$$y_{max} = v \times \Delta t = 0{,}60 \times 90 = 54\,\mathrm{m}$$

La vasque atteint une altitude de **54 m** à la fin de son ascension.

Question 9

La vitesse est constante ($v =$ cte), donc la variation de vitesse est nulle.

RÉPONSE

L'accélération est définie par $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Comme v est constante, $\Delta v = 0$, donc :

$$a = 0\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

L'accélération du système est **nulle** lors de l'ascension.

Question 10

RÉPONSE

$$P = m \times g = 2300 \times 9{,}8 = 22\,540\ \mathrm{N} \approx 2{,}25 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

Le poids de l'ensemble $\{$ballon + nacelle$\}$ vaut $2{,}25 \times 10^4$ N.

Question 11

D'après le résultat de Q9, $\vec{a} = \vec{0}$. Par le principe fondamental de la dynamique ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) :

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{T} = \vec{0}$$

Donc $\vec{\pi} = -(\vec{P} + \vec{T})$. Comme $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont tous deux dirigés vers le bas (le câble s'oppose au mouvement ascendant), la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ est dirigée vers le haut et sa norme vérifie : $\pi = P + T > P$.

RÉPONSE

Le schéma correct est le **schéma A** : la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ (vers le haut) est plus grande que le poids $\vec{P}$ (vers le bas), et la tension $\vec{T}$ du câble est dirigée vers le bas. Les trois forces sont à l'échelle et leur résultante est nulle.

Exercice 3 – Mathématiques

(6 pts)

Question 1 – Affixe d'un point dans le plan complexe

La forme exponentielle d'un complexe est $z = r\,e^{i\theta}$, avec $r = |z|$ le module et $\theta = \arg(z)$ l'argument.

En lisant le graphique, le point M est situé à une distance $r = 5$ de l'origine et son argument vaut $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (premier quadrant).

RÉPONSE

La bonne réponse est **B** : $z_M = 5\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Justification : on lit $|OM| = 5$ sur le graphique (module), et l'angle que fait $\vec{OM}$ avec l'axe réel positif est $\frac{\pi}{6}$ (M est dans le premier quadrant). Les autres réponses ont soit un module incorrect (A), soit un argument négatif (C), soit un signe moins devant le module qui n'a pas de sens géométrique (D).

Question 2 – Équation différentielle

On considère l'équation différentielle : $y' = 2y - 0{,}5$.

1. Ensemble des solutions générales.

On résout d'abord l'équation homogène associée $y' = 2y$, dont les solutions sont $y_h(t) = C\,e^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$.

On cherche ensuite une solution particulière constante $y_p = k$, d'où $y_p' = 0$:

$$0 = 2k - 0{,}5 \implies k = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

RÉPONSE

Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y(t) = C\,e^{2t} + \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

2. Solution vérifiant $y'(0) = -3$.

On calcule $y'(t) = 2C\,e^{2t}$, donc $y'(0) = 2C$. La condition impose $2C = -3$, d'où $C = -\frac{3}{2}$.

RÉPONSE

La solution particulière est :

$$y(t) = -\frac{3}{2}\,e^{2t} + \frac{1}{4}$$

Question 3 – Résolution d'équation avec exponentielle

On résout $f(x) = 0$ avec $f(x) = e^{2x-3} - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

MÉTHODE

La fonction exponentielle est strictement positive, donc $e^{2x-3} = 2 > 0$: l'équation a bien une solution.

$$e^{2x-3} = 2 \implies 2x - 3 = \ln 2 \implies x = \frac{3 + \ln 2}{2}$$

RÉPONSE

La valeur exacte de la solution est :

$$x = \frac{3 + \ln 2}{2}$$

Valeur approchée à 10^{-2} près :

$$x \approx \frac{3 + 0{,}693}{2} \approx \frac{3{,}693}{2} \approx 1{,}85$$

Question 4 – Identité logarithmique

On veut montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\ln\left(\frac{x^2}{4}\right) - 3\ln(x) + \ln(4x) = 0$$

MÉTHODE

On développe chaque terme en utilisant les propriétés : $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \ln a$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x^2}{4}\right) - 3\ln(x) + \ln(4x) &= \left[\ln(x^2) - \ln(4)\right] - 3\ln(x) + \left[\ln(4) + \ln(x)\right] \\
&= 2\ln(x) - \ln(4) - 3\ln(x) + \ln(4) + \ln(x) \\
&= (2 - 3 + 1)\ln(x) + (-\ln 4 + \ln 4) \\
&= 0 \cdot \ln(x) + 0
\end{aligned}$$

RÉPONSE

$$\ln\left(\frac{x^2}{4}\right) - 3\ln(x) + \ln(4x) = 0 \quad \text{pour tout } x > 0. \qquad \square$$

Exercice 4 – Au cœur d'un réacteur nucléaire

(6 pts)

Partie 1 – Étude du combustible

Question 1

Dans une tonne d'uranium naturel :

$$m_{total} = m_{234} + m_{235} + m_{238} = 0{,}056 + 7{,}1 + 992{,}8 = 999{,}956 \text{ kg} \approx 1000 \text{ kg}$$

RÉPONSE

La proportion d'uranium 235 dans l'uranium naturel est :

$$\frac{m_{235}}{m_{total}} = \frac{7{,}1}{1000} = 0{,}71\%$$

Cette valeur est **inférieure à 3%**, soit en dessous du minimum requis pour le combustible nucléaire (3% à 5%). L'uranium naturel doit donc être enrichi.

Question 2

RÉPONSE

Il s'agit d'une **réaction de fission** nucléaire.
Justification : un neutron percute un noyau lourd ($^{235}_{92}$U) qui se *scinde* en deux noyaux de masse intermédiaire ($^{94}_{38}$Sr et $^{140}_{54}$Xe) en libérant des neutrons. C'est la caractéristique de la fission (cassure d'un noyau lourd en noyaux plus légers), à l'opposé de la fusion (union de noyaux légers en un noyau plus lourd).

Question 3

RAPPEL DE COURS

La relation énergie-masse d'Einstein : $\Delta E = \Delta m \times c^2$

RÉPONSE

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta m \times c^2 \\
&= 2{,}39 \times 10^{-28} \times (3{,}00 \times 10^8)^2 \\
&= 2{,}39 \times 10^{-28} \times 9{,}00 \times 10^{16} \\
&= 2{,}151 \times 10^{-11} \text{ J} \\
&\approx 2{,}2 \times 10^{-11} \text{ J}
\end{aligned}$$

Question 4

1 kg de combustible UO_2 contient 70 g $= 7{,}0 \times 10^{-2}$ kg d'uranium 235. La masse d'un noyau est $m(^{235}_{92}\text{U}) = 3{,}90 \times 10^{-25}$ kg.

RÉPONSE

$$N = \frac{m_{U235}}{m(\text{noyau})} = \frac{7{,}0 \times 10^{-2}}{3{,}90 \times 10^{-25}} \approx 1{,}8 \times 10^{23}\ \text{noyaux}$$

Question 5

L'énergie libérée par kg de combustible UO_2 est :

$$E_{kg} = N \times \Delta E = 1{,}8 \times 10^{23} \times 2{,}2 \times 10^{-11} = 3{,}96 \times 10^{12}\ \mathrm{J\,kg^{-1}} \approx 4{,}0 \times 10^{12}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$

RÉPONSE

Comparaison : le pouvoir calorifique du propane est $4{,}6 \times 10^{7}$ $\mathrm{J\,kg^{-1}}$.

$$\frac{E_{kg}}{PC_{\text{propane}}} = \frac{4{,}0 \times 10^{12}}{4{,}6 \times 10^{7}} \approx 87\,000$$

Commentaire : l'énergie libérée par fission d'1 kg de combustible nucléaire est environ **87 000 fois supérieure** à celle libérée par la combustion d'1 kg de propane. La fission nucléaire est donc une source d'énergie extraordinairement plus concentrée que la combustion chimique.

Partie 2 – Assemblage de combustible

Question 6

Le volume total de combustible dans le réacteur est :

$$V_{total} = 157 \times V = 157 \times 5{,}1 \times 10^{-2} = 8{,}007\ \mathrm{m^3} \approx 8{,}0\ \mathrm{m^3}$$

La puissance volumique est de $4{,}0 \times 10^{8}$ $\mathrm{W\,m^{-3}}$, donc :

RÉPONSE

$$P = V_{total} \times p_{vol} = 8{,}0 \times 4{,}0 \times 10^{8} = 3{,}2 \times 10^{9}\ \mathrm{W} = 3200\ \mathrm{MW}$$

Le réacteur dégage une puissance thermique totale d'environ **3200 MW**.

Question 7

RAPPEL DE COURS

Le rendement est $\eta = \frac{P_e}{P}$, rapport de la puissance utile (électrique) à la puissance totale produite (thermique).

RÉPONSE

$$\eta = \frac{P_e}{P} = \frac{1100 \times 10^{6}}{3{,}2 \times 10^{9}} = \frac{1{,}1 \times 10^{9}}{3{,}2 \times 10^{9}} \approx 0{,}34$$

Le rendement du réacteur est d'environ **34 %**. Les 66 % restants sont dissipés sous forme de chaleur (vers les tours de refroidissement ou le fleuve adjacent).

Partie 3 – Pression de l'eau dans la cuve

Question 8

RÉPONSE

D'après le diagramme d'état (P,T) de la figure 3, à une pression constante de $P = 155$ bar, on se déplace **horizontalement** de gauche à droite en augmentant la température.

Le point A correspond à l'entrée de l'eau à $\approx 190\,°\mathrm{C}$ sous 155 bar (eau liquide) et le point D correspond à la sortie à $\approx 325\,°\mathrm{C}$ sous 155 bar (eau encore liquide, car la courbe de vaporisation n'est pas atteinte à cette pression).
La transition A $\rightarrow$ D se fait donc **à pression constante de 155 bar**, entièrement dans le domaine liquide, sans changement d'état.

Question 9

RÉPONSE

D'après le diagramme (P,T), à une pression de 50 bar, la courbe de saturation liquide-vapeur est franchie pour une température inférieure à $325\,°$C.
En chauffant l'eau de $190\,°$C à $325\,°$C à **50 bar**, on traverserait la frontière liquide-vapeur : l'eau se **vaporiserait** avant d'atteindre $325\,°$C. Or la cuve doit contenir de l'eau *liquide* pour assurer les échanges thermiques et réguler la réaction nucléaire.
C'est pourquoi il est nécessaire de maintenir une pression de 155 bar.

Partie 4 – Protection du combustible

Question 10

Les demi-équations redox sont :

$$\text{(1)}\quad \mathrm{ZrO_2(s) + 4\,H^+(aq) + 4\,e^- \rightleftharpoons Zr\,(s) + 2\,H_2O\,(l)}$$

$$\text{(2)}\quad \mathrm{2\,H^+(aq) + 2\,e^- \rightleftharpoons H_2(g)}$$

RÉPONSE

Dans la demi-équation (1), Zr(s) est la forme **réduite** du couple ZrO_2/Zr.
Lors de la réaction étudiée, le zirconium est **oxydé** (il perd des électrons pour former ZrO_2). Il joue donc le rôle de **réducteur**.

Question 11

On combine les demi-équations en inversant la demi-équation (1) (oxydation du Zr) et en multipliant la demi-équation (2) par 2 pour équilibrer les électrons ($n_e = 4$) :

Oxydation : $\mathrm{Zr\,(s) + 2\,H_2O\,(l) \longrightarrow ZrO_2(s) + 4\,H^+(aq) + 4\,e^-}$
Réduction $(\times 2)$: $\mathrm{4\,H^+(aq) + 4\,e^- \longrightarrow 2\,H_2(g)}$

En additionnant et en simplifiant :

RÉPONSE

$$\mathrm{Zr\,(s) + 2\,H_2O\,(l) \longrightarrow ZrO_2(s) + 2\,H_2(g)}$$

Question 12

RÉPONSE

Lors de la réaction d'oxydoréduction, une couche de ZrO_2 (oxyde de zirconium) se forme à la **surface** de la gaine.
Le sujet indique que cette couche est **imperméable à l'eau** : elle isole le zirconium restant du contact avec l'eau. Sans contact entre Zr et H_2O, la réaction d'oxydoréduction ne peut plus se poursuivre, et la corrosion est stoppée.
La couche de ZrO_2 joue ainsi le rôle de **barrière protectrice passive**, analogue à la passivation de l'aluminium ou de l'acier inoxydable.

Corrigé réalisé par Pierre Carrée – pierre-carree.fr – Document à usage pédagogique uniquement