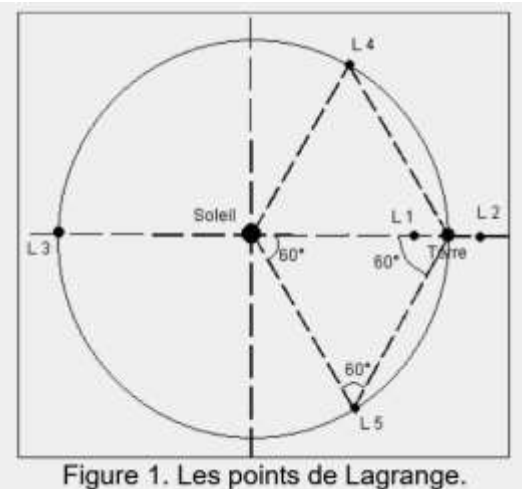


Données :

- distance Terre – Soleil : $D_{T-S} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$;
- distance Terre – JWST : $D_{T-J} = 1,511 \times 10^6 \text{ km}$;
- masse de JWST : $m_J = 6,17 \times 10^3 \text{ kg}$;
- masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$;
- masse du Soleil : $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$;
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

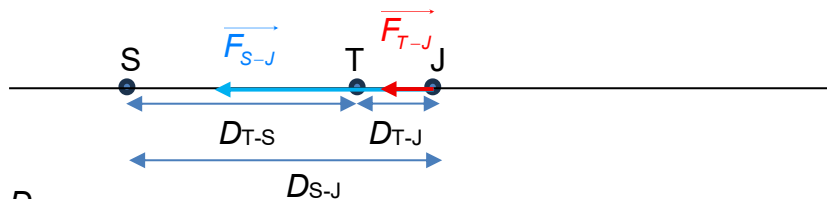


Mouvement orbital du télescope JWST.

Q1. Indiquer les raisons pour lesquelles il n'aurait pas été judicieux de placer le télescope JWST au point de Lagrange L1 (voir figure 1).

Au point de Lagrange L1, le satellite aurait été soumis au rayonnement thermique du Soleil et d'autre part, la Terre serait dans l'axe d'observation, elle masquerait une partie de l'espace observable.

Q2. Représenter, sans souci d'échelle, l'alignement du Soleil, de la Terre et du télescope JWST situé en L2. Ces trois corps seront représentés par des points notés S, T et J. Faire apparaître sur la figure la distance Terre – Soleil notée D_{T-S} et la distance Terre – JWST notée D_{T-J} . Calculer la distance D_{S-J} du Soleil au télescope JWST.



$$D_{S-J} = D_{T-S} + D_{T-J}$$

$$D_{S-J} = 149,6 \times 10^6 + 1,511 \times 10^6 = 151,1 \times 10^6 \text{ km}$$

Remarque : Pour une addition ou une soustraction, on garde le nombre de décimales du nombre le moins précis. Ici la précision de $149,6 \times 10^6 \text{ km}$ porte sur 10^5 km et celle de $1,511 \times 10^6 \text{ km}$ porte sur 10^3 km . On arrondit donc à 10^5 km près le résultat de l'addition.

Q3. Exprimer la force d'attraction gravitationnelle, notée F_{T-J} , qu'exerce la Terre sur le télescope JWST en fonction de G , m_J , M_T et D_{T-J} puis la calculer.

$$F_{T-J} = G \cdot \frac{m_J \cdot M_T}{D_{T-J}^2}$$

$$F_{T-J} = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{6,17 \times 10^3 \times 5,97 \times 10^{24}}{(1,511 \times 10^9)^2} = 1,08 \text{ N}$$

$$6.67 \text{E} -11 * \frac{6.17 \text{E}3 * 5.97 \text{E}24}{1.511 \text{E}9^2} = 1.076109339 \text{E}0$$

Remarque : Attention il faut convertir la distance en m.

La force d'attraction gravitationnelle, notée $\vec{F}_{S-J}$, qu'exerce le Soleil sur le télescope JWST a pour valeur $F_{S-J} = 35,9 \text{ N}$.

Q4. Représenter, sur le schéma réalisé à la question Q2 et sans souci d'échelle, le vecteur $\vec{F}_{T-J}$ représentant la force exercée par la Terre sur le télescope JWST et le vecteur $\vec{F}_{S-J}$ représentant la force exercée par le Soleil sur le télescope JWST.

On note $\vec{F}$ la force correspondant à la résultante des forces $\vec{F}_{T-J}$ et $\vec{F}_{S-J}$ agissant sur le télescope JWST ; on a donc $\vec{F} = \vec{F}_{T-J} + \vec{F}_{S-J}$.

Q5. Vérifier que la valeur de la force $\vec{F}$ vaut approximativement $F = 37,0$ N.

Comme les forces ont même sens et même direction alors $F = F_{T-J} + F_{S-J}$.

$$F = 1,08 + 35,9 = 37,0 \text{ N}$$

On admet que le centre de masse du télescope JWST a une trajectoire circulaire de rayon $D_{S-J} = 151,1 \times 10^6$ km centrée sur le Soleil. La Terre, le Soleil et le télescope JWST restent alignés en permanence.

La force de gravitation totale exercée sur le télescope JWST peut s'exprimer à l'aide

de la relation : $F = G \cdot m_J \cdot \left(\frac{M_S}{D_{S-J}^2} + \frac{M_T}{D_{T-J}^2} \right)$.

Pour simplifier les calculs, on introduit la distance effective D_{eff} entre le Soleil et le télescope

JWST, définie par la relation : $F = G \cdot m_J \cdot \left(\frac{M_S}{D_{\text{eff}}^2} \right)$.

Q6. Exprimer la distance effective D_{eff} en fonction de M_S , M_T , D_{S-J} et D_{T-J} et vérifier que cette distance effective a pour valeur $D_{\text{eff}} = 1,49 \times 10^{11}$ m.

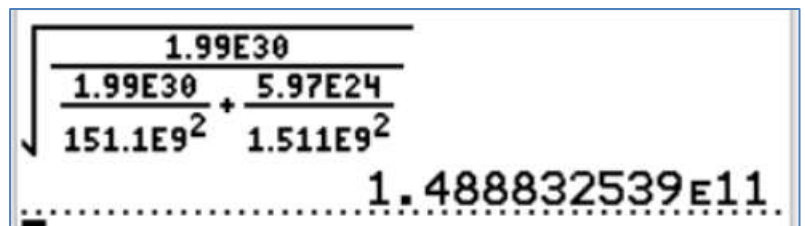
$$F = G \cdot m_J \cdot \left(\frac{M_S}{D_{\text{eff}}^2} \right) = G \cdot m_J \cdot \left(\frac{M_S}{D_{S-J}^2} + \frac{M_T}{D_{T-J}^2} \right)$$

$$\left(\frac{M_S}{D_{\text{eff}}^2} \right) = \left(\frac{M_S}{D_{S-J}^2} + \frac{M_T}{D_{T-J}^2} \right)$$

$$D_{\text{eff}}^2 = \frac{M_S}{\left(\frac{M_S}{D_{S-J}^2} + \frac{M_T}{D_{T-J}^2} \right)}$$

$$D_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{M_S}{\left(\frac{M_S}{D_{S-J}^2} + \frac{M_T}{D_{T-J}^2} \right)}}$$

$$D_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1,99 \times 10^{30}}{\left(\frac{1,99 \times 10^{30}}{(151,1 \times 10^9)^2} + \frac{5,97 \times 10^{24}}{(1,511 \times 10^9)^2} \right)}} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$$

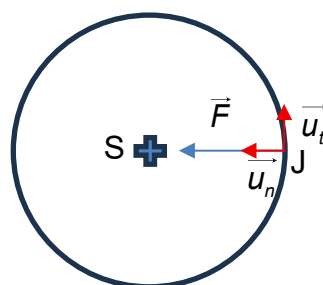


Handwritten calculation showing the steps to find D_{eff} :

$$\sqrt{\frac{1.99\text{E}30}{\frac{1.99\text{E}30}{151.1\text{E}9^2} + \frac{5.97\text{E}24}{1.511\text{E}9^2}}} = 1.488832539\text{E}11$$

Q7. Sur un schéma représentant la trajectoire circulaire du télescope JSWT, représenter, sans souci d'échelle, les vecteurs $\vec{u}_n$ et $\vec{u}_t$ du repère de Frenet, respectivement normal et tangent à la trajectoire, au niveau du télescope JWST.

Représenter également la force $\vec{F}$.



Q8. Donner l'expression de l'accélération normale a_n du télescope JWST en fonction de la vitesse v et du rayon de la trajectoire D_{S-J} .

$$a_n = \frac{v^2}{D_{S-J}}$$

Dans la situation particulière étudiée, la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ qu'exercent le Soleil et la Terre sur le télescope JWST peut s'écrire : $\vec{F} = G \cdot \frac{m_J \cdot M_S}{D_{eff}^2} \cdot \vec{u}_n$.

Q9. En appliquant la deuxième loi de Newton dans le référentiel d'étude, supposé galiléen, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse du télescope JWST en fonction de G , M_S , D_{eff} et $\vec{u}_n$.

Deuxième loi de Newton appliquée au système {JWST} $\Sigma \vec{F}_{ext.} = m_J \cdot \vec{a}$.

Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil et de la Terre alors $\vec{F} = m_J \cdot \vec{a}$.

$$G \cdot \frac{m_J \cdot M_S}{D_{eff}^2} \cdot \vec{u}_n = m_J \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M_S}{D_{eff}^2} \cdot \vec{u}_n$$

Q10. Montrer que la vitesse v du télescope JWST s'écrit : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S \cdot D_{S-J}}{D_{eff}^2}}$

Dans le repère de Frenet, on a $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{D_{S-J}} \vec{n}$

et on a établi que $\vec{a} = G \cdot \frac{M_S}{D_{eff}^2} \cdot \vec{u}_n$ donc $\frac{v^2}{D_{S-J}} = G \cdot \frac{M_S}{D_{eff}^2}$ et on retrouve $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S \cdot D_{S-J}}{D_{eff}^2}}$.

Q11. En déduire que la période de révolution T du télescope JWST est donnée par la relation $T = 2\pi \sqrt{\frac{D_{S-J} \cdot D_{eff}^2}{G \cdot M_S}}$. Calculer sa valeur en jours et vérifier la cohérence avec la valeur attendue.

Le satellite parcourt le périmètre de sa trajectoire circulaire de longueur $2\pi D_{S-J}$ en une durée T à la vitesse v .

$$v = \frac{2\pi D_{S-J}}{T}$$

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_S \cdot D_{S-J}}{D_{eff}^2}} = \frac{2\pi D_{S-J}}{T}$$

$$T = \frac{2\pi D_{S-J}}{\sqrt{\frac{G \cdot M_S \cdot D_{S-J}}{D_{eff}^2}}}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 D_{S-J}^2}{G \cdot M_S \cdot D_{S-J}} = \frac{(2\pi)^2 D_{S-J}}{G \cdot M_S} = \frac{(2\pi)^2 D_{S-J} \cdot D_{eff}^2}{G \cdot M_S}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D_{S-J} \cdot D_{eff}^2}{G \cdot M_S}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{151,1 \times 10^9 \times (1,49 \times 10^{11})^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30}}} = 3,16 \times 10^7 \text{ s, soit 365 jours. Cette valeur est cohérente, puisque}$$

le satellite, tout comme la Terre, met un an pour faire le tour du Soleil.

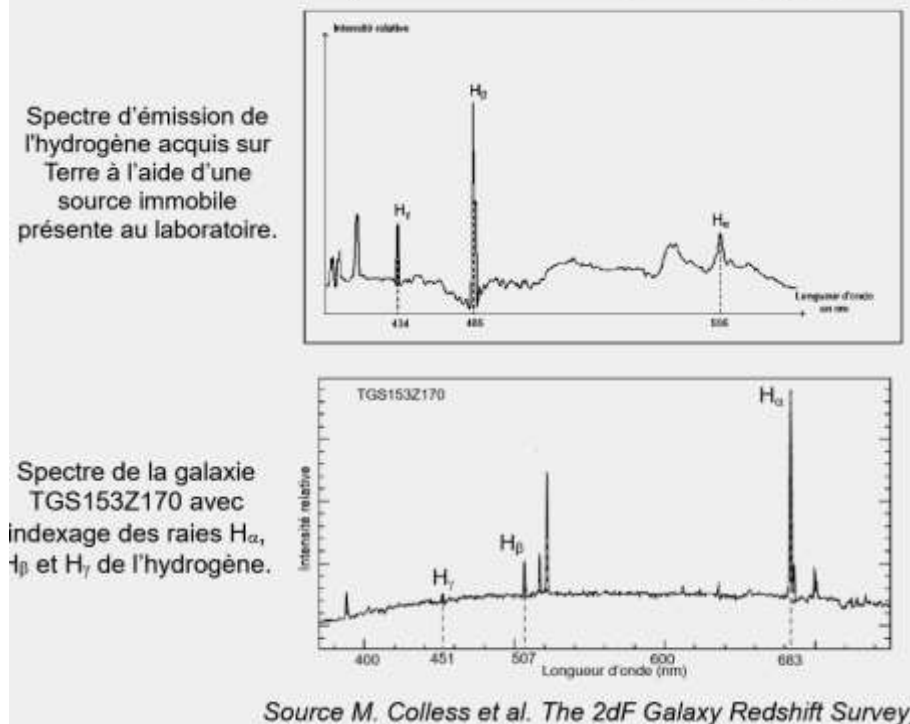
Handwritten calculation of the period T in seconds:

$$2\pi \sqrt{\frac{151.1E9 \times 1.49E11^2}{6.67E-11 \times 1.99E30}} = 3.158703879E7$$

Rep/(24*3600) = 3.655907268E2

Vitesse d'éloignement de la galaxie TGS153Z170.

D'après Boratav & R. Kerner, *Relativité, Ellipse*, 1991



Le télescope JWST est sensible aux longueurs d'onde comprises entre $0,6 \mu\text{m}$ et $28 \mu\text{m}$.

Q12. Indiquer, en justifiant, la raison pour laquelle seule la raie H_{α} de l'atome d'hydrogène émise par la galaxie TGS153Z170 peut être observée par le télescope JWST.

Le télescope n'est sensible qu'aux longueurs d'onde supérieures à $0,6 \mu\text{m} = 0,6 \times 10^3 \text{ nm} \sim 600 \text{ nm}$. Or seule la raie H_{α} de l'hydrogène possède une longueur d'onde qui respecte cette condition.

La longueur d'onde de la raie H_{α} dans le cas d'une source présente au laboratoire est notée λ_H et sa fréquence associée f_H . Dans le cas d'une source présente dans la galaxie TGS153Z170 la longueur d'onde apparente de la raie H_{α} est notée λ'_H et sa fréquence f'_H .

Q13. Préciser si la valeur de f'_H est plus grande ou plus petite que la valeur de f_H et indiquer si la galaxie TGS153Z170 s'éloigne ou se rapproche de la Terre.

À l'aide des deux spectres, on constate que $\lambda_H < \lambda'_H$.

Or $\lambda = \frac{c}{f}$ ou $f = \frac{c}{\lambda}$, donc $\frac{c}{\lambda_H} > \frac{c}{\lambda'_H}$ et $f_H > f'_H$.

f'_H est plus petite que f_H donc la galaxie s'éloigne de la Terre.

On souhaite déterminer la vitesse de déplacement v_{Gal} de la galaxie TGS153Z170 par rapport à la Terre. Dans ce cas particulier, la relation entre les longueurs d'onde λ_H et λ'_H est donnée par la formule (1) ci-dessous.

$$\lambda'_H = \lambda_H \cdot \left(1 + \frac{v_{GAL}}{c} \right) \quad (1)$$

avec v_{Gal} la vitesse de déplacement de la galaxie TGS153Z170 par rapport à la Terre et c la célérité de la lumière dans le vide.

Donnée : célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q14. À l'aide de la formule (1) ci-dessus, exprimer puis calculer la vitesse de déplacement v_{Gal} de la galaxie TGS153Z170 par rapport à la Terre.

On lit sur le spectre d'une source immobile $\lambda_H = 656 \text{ nm}$ et sur le spectre de la galaxie $\lambda'_H = 683 \text{ nm}$.

$$\lambda'_H = \lambda_H \cdot \left(1 + \frac{v_{GAL}}{c} \right)$$

$$\frac{\lambda'_H}{\lambda_H} = \left(1 + \frac{v_{GAL}}{c} \right)$$

$$\frac{v_{GAL}}{c} = \frac{\lambda'_H}{\lambda_H} - 1$$

$$v_{GAL} = \left(\frac{\lambda'_H}{\lambda_H} - 1 \right) \cdot c$$

$$v_{GAL} = \left(\frac{683 \text{ nm}}{656 \text{ nm}} - 1 \right) \times 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,23 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En astrophysique, la loi de Hubble-Lemaître énonce que les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse approximativement proportionnelle à leur distance.

Autrement dit, plus une galaxie est loin de nous, plus elle semble s'éloigner rapidement.

La loi de Hubble-Lemaître a pour expression : $v_{Gal} = H_0 \cdot D$, où :

- v_{Gal} est la vitesse d'éloignement de la galaxie en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ par rapport à la Terre ;
- H_0 est la constante de Hubble avec $H_0 = 70 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$;
- D est la distance entre la Terre et la galaxie en Mpc (Mégaparsec).

Donnée : unité de distance le Mégaparsec : $1 \text{ Mpc} = 3,1 \times 10^{22} \text{ m}$.

Q15. Calculer, en Mégaparsec puis en mètres, la distance D à laquelle la galaxie TGS153Z170 se trouve de la Terre.

$$v_{Gal} = H_0 \cdot D \text{ donc } D = \frac{v_{Gal}}{H_0}$$

$$D = \frac{1,23475 \times 10^7}{70 \times 10^3} = 1,8 \times 10^2 \text{ Mpc} = 5,5 \times 10^{24} \text{ m}$$

$(\frac{683}{656} - 1) \times 3 \text{E}8$	
Rep/70E3	1.234756098E7
Rep*3.1E22	1.763937282E2
	5.468205575E24

Merci de nous signaler la présence d'éventuelles erreurs à labolycee@labolycee.org