

Données :

- la désintégration β^- s'accompagne de l'émission d'un électron ${}^0_{-1}\text{e}$;
- la désintégration α s'accompagne de l'émission d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.

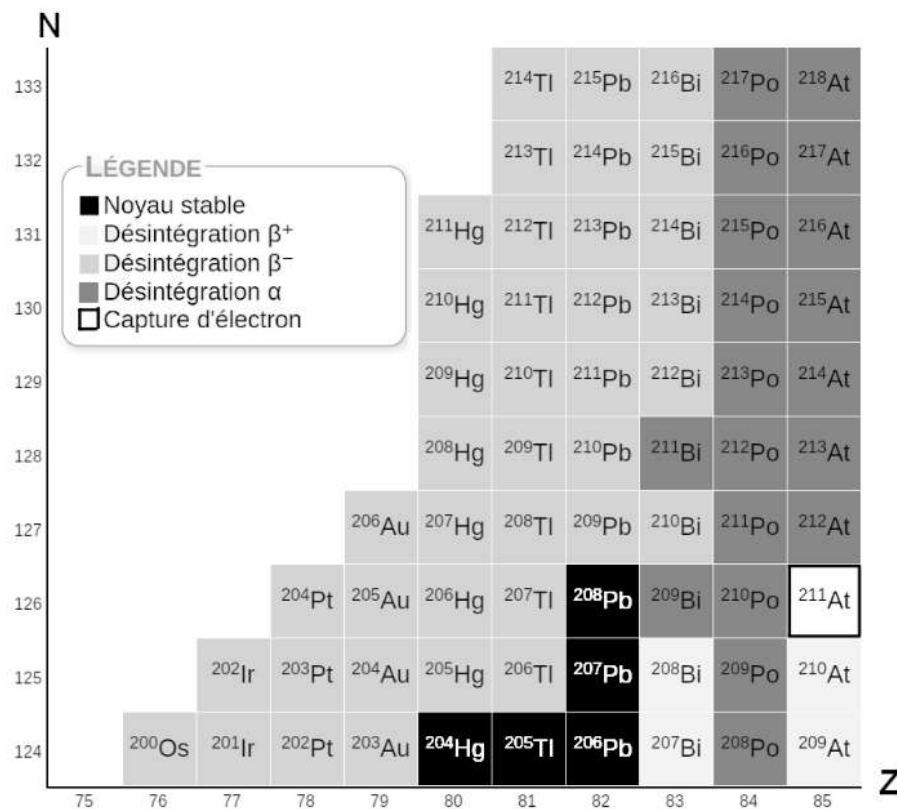
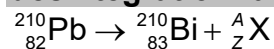


Figure 1. Diagramme (Z,N), adapté du site ostralo.net.

Q1. À l'aide du diagramme (Z,N) de la figure 1, déterminer le type de désintégration que subit le plomb-210.

Le plomb 210 est dans une case gris clair, donc il subit une désintégration β^- .

Q2. À l'aide de la figure 1 et des lois de conservation, établir l'équation modélisant la désintégration radioactive du plomb-210 amenant à la formation du bismuth-210.



Loi de conservation de la charge électrique : $82 = 83 + Z$ donc $Z = -1$.

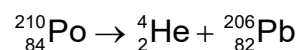
Loi de conservation du nombre de nucléons : $210 = 210 + A$ donc $A = 0$.

La particule formée est un électron ${}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} + {}^0_{-1}\text{e}$.

Ceci est en accord avec la réponse précédente.

Le bismuth-210 subit ensuite une désintégration β^- pour former le polonium-210. Ce dernier, également instable, se désintègre à son tour.

Q3. À l'aide du diagramme (Z,N) de la figure 1, indiquer le noyau formé à l'issue de la désintégration du polonium-210. Justifier que le polonium-210 est le « dernier noyau radioactif » de la chaîne de désintégration du plomb-210.



Il se forme un noyau de plomb 206 qui est un noyau stable, ainsi la chaîne de désintégration s'arrête.

L'activité d'un échantillon de noyaux radioactifs est le nombre de désintégrations radioactives par unité de temps dans cet échantillon.

Q4. Donner la relation entre l'activité $A(t)$ d'un échantillon et la dérivée temporelle du nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ dans l'échantillon.

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}.$$

L'activité $A(t)$ d'un échantillon radioactif est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs présents $N(t)$. On écrit $A(t) = \lambda \cdot N(t)$ où la constante de proportionnalité λ est nommée constante radioactive et ne dépend que du type de noyaux radioactifs de l'échantillon.

Q5. Établir l'équation différentielle régissant la population de noyaux radioactifs $N(t)$ sous la forme $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda \cdot N(t) = 0$.

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} \text{ et } A(t) = \lambda \cdot N(t)$$

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda \cdot N(t) = 0$$

Q6. Vérifier que $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ est solution de l'équation différentielle précédente, avec N_0 le nombre de noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon.

Dans l'équation différentielle, on remplace $N(t)$ par la solution proposée et on vérifie que cela conduit à zéro.

$$\frac{d(N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t})}{dt} + \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 0$$

Données :

➤ demi-vies $t_{1/2}$ de différents noyaux radioactifs :

Noyau radioactif	Plomb-210 ^{210}Pb	Bismuth-210 ^{210}Bi	Polonium-210 ^{210}Po
Demi-vie $t_{1/2}$	22,2 ans	5,0 jours	138 jours

Q7. Démontrer que le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est relié à la constante radioactive λ par

$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$. Calculer la constante radioactive λ_{Pb} du plomb-210.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot t_{1/2}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \cdot t_{1/2}$$

$$\ln(1) - \ln(2) = -\lambda \cdot t_{1/2}$$

$$\lambda \cdot t_{1/2} = \ln(2)$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \text{ donc } \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \text{ ainsi } \lambda_{\text{Pb}} = \frac{\ln(2)}{22,2 \text{ an}} = 3,12 \times 10^{-2} \text{ an}^{-1}$$

Dans la question suivante, le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

En 1993, des chercheurs de l'université de Yamagata au Japon ont daté les différentes couches d'une carotte de glace dans l'archipel norvégien de Svalbard à l'aide de cette méthode. À une profondeur de 30 m, une masse de 1 kg de glace avait une activité $A_{30} = 4,72$ mBq liée au plomb 210. On supposera que l'activité d'un kilogramme de glace liée au plomb-210 valait $A_0 = 110$ mBq à sa formation.

Q8. Déterminer l'année à laquelle la glace présente à 30 m de profondeur s'est formée. En déduire l'épaisseur moyenne de glace accumulée chaque année sur l'archipel durant cette période.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$$

$$A(t) = -(-\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}) = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{On pouvait donner directement cette relation.}$$

$$A_{30} = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\frac{A_{30}}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{A_{30}}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{A_{30}}{A_0}\right)}{-\lambda}$$

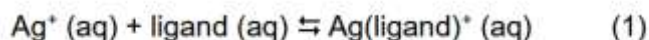
$$t = \frac{\ln\left(\frac{4,72 \text{ mBq}}{110 \text{ mBq}}\right)}{-3,122 \times 10^{-2} \text{ an}^{-1}} = 101 \text{ ans}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{4,72}{110}\right)}{-3.122284597E-2} = 1.008451174E2$$

Les mesures ont été faites en 1993, la glace s'est formée 101 ans avant donc en 1993 – 101 = 1892.

La glace avait une épaisseur de 30 m, et cela correspond à 101 ans d'accumulation de glace. Ainsi chaque année en moyenne il se forme une épaisseur de 30 m/101 ans = 0,30 m.

$$30/1.008451174E2 = 2.974858949E-1$$



La structure de la molécule constituant le ligand est représentée figure 2 :

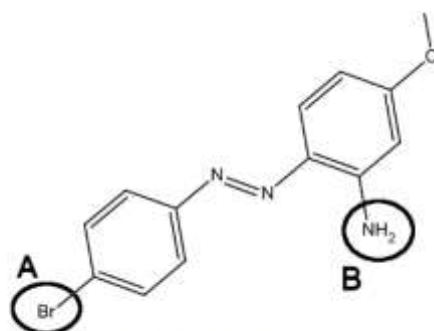


Figure 2. Structure du ligand.

Q9. Nommer le type de représentation utilisé pour la molécule de ligand représentée sur la figure 2.

La figure 2 montre une formule topologique.

Q10. Nommer les deux familles fonctionnelles correspondant aux groupes caractéristiques A et B entourés sur la figure 2.

Le groupe A est un groupe bromo de la famille des composés halogénés, et le groupe B est un groupe amino de la famille des amines.

Q11. Écrire la constante d'équilibre de la réaction de formation de $\text{Ag}(\text{ligand})^+ (\text{aq})$ en fonction des concentrations à l'équilibre des différentes espèces et de la concentration standard c^0 .

$$Q_{r,\text{éq}} = K = \frac{\frac{[\text{Ag}(\text{ligand})^+ (\text{aq})]_{\text{éq}}}{c^0}}{\frac{[\text{Ag}^+ (\text{aq})]_{\text{éq}}}{c^0} \cdot \frac{[\text{ligand} (\text{aq})]_{\text{éq}}}{c^0}} = \frac{[\text{Ag}(\text{ligand})^+ (\text{aq})]_{\text{éq}} \cdot c^0}{[\text{Ag}^+ (\text{aq})]_{\text{éq}} \cdot [\text{ligand} (\text{aq})]_{\text{éq}}}$$

Q12. Justifier que la réaction de formation de $\text{Ag}(\text{ligand})^+ (\text{aq})$ est quasi-totale si le ligand est en très fort excès.

Si le ligand est en très fort excès alors la concentration $[\text{ligand}(\text{aq})]$ est très grande.

Or $Q_r = \frac{[\text{Ag}(\text{ligand})^+ (\text{aq})] \cdot c^0}{[\text{Ag}^+ (\text{aq})] \cdot [\text{ligand} (\text{aq})]}$ donc le quotient de réaction sera très petit et sans doute inférieur

à la constante d'équilibre K de la réaction.

La réaction a lieu dans le sens direct de consommation des réactifs.

Par ailleurs, on sait que l'ajout d'un réactif en excès permet d'augmenter le taux d'avancement. On peut imaginer que celui-ci devienne égal à 100%.

Remarque : cette question pose problème. On ne connaît pas la valeur de K , or si K est très faible rien ne permet d'affirmer avec certitude que Q_r sera vraiment inférieur à K .

Les solutions aqueuses contenant l'espèce chimique $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ sont colorées, ce qui permet d'utiliser une méthode de dosage spectrophotométrique en étudiant l'absorbance de la solution. L'espèce chimique $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ possède un pic d'absorbance pour une longueur d'onde $\lambda_{\text{max}} = 516 \text{ nm}$. On donne le cercle chromatique sur la figure 3.

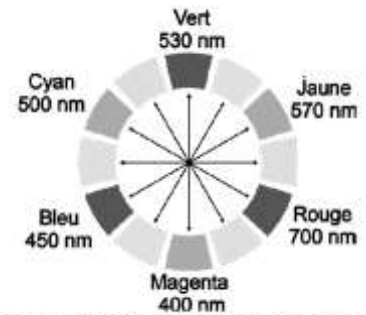


Figure 3. Cercle chromatique.

Q13. En vous aidant de la figure 3, déterminer la couleur des solutions aqueuses contenant l'espèce chimique $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$.

$\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ absorbe fortement les radiations de couleurs comprises entre le cyan et le vert ($\lambda = 516 \text{ nm}$), alors $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ apparaît de la couleur complémentaire diamétralement opposée sur le cercle chromatique de la figure 3.

$\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ apparaît entre rouge et magenta donc une couleur un peu bordeaux.

On mélange un volume $V_{\text{Ag}^+} = 1,0 \text{ mL}$ d'une solution de concentration d'ion argent $[\text{Ag}^+] = 7,4 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec un volume V_L de solution de ligand à la concentration $c_L = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Q14. Calculer la quantité de matière en ions argent $n_{\text{Ag},i}$ initialement introduite dans la solution.

$$n_{\text{Ag},i} = [\text{Ag}^+] \cdot V_{\text{Ag}^+}$$

$$n_{\text{Ag},i} = 7,4 \times 10^{-6} \times 1,0 \times 10^{-3} = 7,4 \times 10^{-9} \text{ mol} = 7,4 \text{ nmol (nanomole)}$$

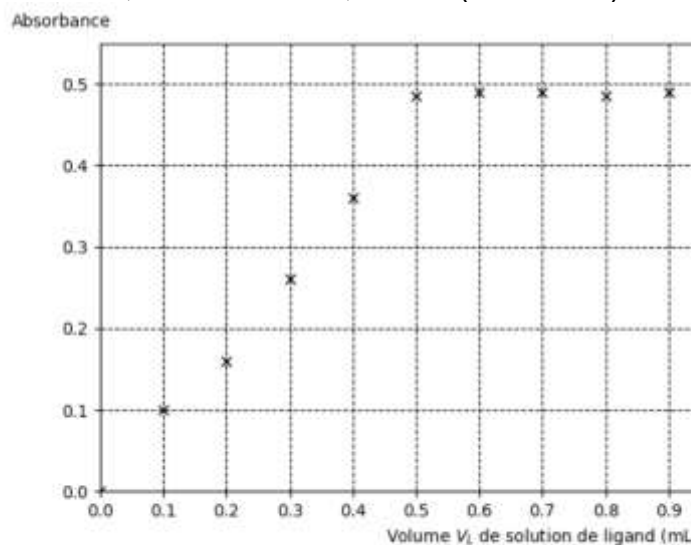


Figure 4. Évolution de l'absorbance de la solution en fonction du volume de solution de ligand introduit.

On constate qu'à partir d'un certain volume introduit, la quantité de $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ n'évolue plus, ce qui signifie que pratiquement tous les ions argent $\text{Ag}^+(\text{aq})$ ont réagi avec le ligand.

Q15. À l'aide de la figure 4, déterminer le volume $V_{\text{tot},L}$ de solution de ligand versé pour que l'ensemble des ions argent $\text{Ag}^+(\text{aq})$ présents aient réagi en quasi-totalité. Calculer la quantité de matière de ligand n_L à introduire.

$$V_{\text{tot},L} = 0,5 \text{ mL}$$

$$n_L = c_L \cdot V_{\text{tot},L}$$

$$n_L = 1,0 \times 10^{-3} \times 0,5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-7} \text{ mol}$$

Q16. Vérifier que le ligand est bien en large excès par rapport aux ions $\text{Ag}^+(\text{aq})$ initialement introduits. Commenter ce résultat.

$$n_{\text{L}} = 5 \times 10^{-7} \text{ mol} \quad \text{et} \quad n_{\text{Ag,i}} = 7,4 \times 10^{-9} \text{ mol}$$

L'équation de la réaction est $\text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{ligand}(\text{aq}) \rightleftharpoons \text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$

Comme $\frac{n_{\text{L}}}{1} > \frac{n_{\text{Ag,i}}}{1}$ donc le ligand est bien excès.

On avait besoin seulement de $7,4 \times 10^{-9} \text{ mol}$ de ligand, on en a mis $\frac{5 \times 10^{-7}}{7,4 \times 10^{-9}} = 7 \times 10^1$ fois plus que nécessaire.

Q17. En supposant la réaction totale et en utilisant la loi de Beer-Lambert, montrer que l'absorbance de la solution de l'espèce chimique $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ est proportionnelle à la concentration en quantité de matière en ions argent initialement en solution $c_{\text{Ag,i}}$. On pourra éventuellement s'aider d'un tableau d'avancement.

équation chimique		$\text{Ag}^+(\text{aq})$	+	$\text{ligand}(\text{aq})$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$
État du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)				
État initial	0	$n_{\text{Ag,i}} = 7,4 \times 10^{-9}$		$n_{\text{L}} = 5 \times 10^{-7}$		0
En cours de transformation	x	$n_{\text{Ag,i}} - x$		$5 \times 10^{-7} - x$		x
État final	x_{max}	$7,4 \times 10^{-9} - x_{\text{max}} = 0$		$5 \times 10^{-7} - x_{\text{max}} > 0$		$n(\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})) = x_{\text{max}} = n_{\text{Ag,i}}$

Ag^+ conduit au plus petit avancement maximal, on a $x_{\text{max}} = n_{\text{Ag,i}} = 7,4 \times 10^{-9} \text{ mol}$

Loi de Beer-Lambert : $A = k \cdot [\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})]$

$$A = k \cdot \frac{n(\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq}))}{V_{\text{L}} + V_{\text{Ag}^+}}$$

Or d'après le tableau d'avancement $n(\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})) = n_{\text{Ag,i}}$ donc $A = k \cdot \frac{n_{\text{Ag,i}}}{V_{\text{L}} + V_{\text{Ag}^+}} = k \cdot \frac{c_{\text{Ag,i}} \cdot V_{\text{Ag}^+}}{V_{\text{L}} + V_{\text{Ag}^+}}$

L'absorbance est bien proportionnelle à $c_{\text{Ag,i}}$.

Les chercheurs de l'université de Al-Qadisiyah ont indiqué que pour des concentrations en masse d'ions argent comprises entre $c_{\text{m,min}} = 9 \times 10^{-3} \mu\text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$ et $c_{\text{m,max}} = 1,5 \mu\text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$, l'absorbance A de la solution de l'espèce chimique $\text{Ag}(\text{ligand})^+(\text{aq})$ est reliée à la concentration en quantité de matière c (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) en ions argent par : $A = 6,5 \times 10^4 \times c$.

Données :

- masse molaire atomique de l'argent : $M(\text{Ag}) = 108 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- valeur limite de mesure du spectrophotomètre à $\lambda = 516 \text{ nm}$: $A_{\text{max}} = 0,9$.

Q18. Vérifier que la valeur maximale de la concentration en masse en ions argent, $c_{\text{m,max}}$, indiquée par les chercheurs est cohérente avec une limite expérimentale de la loi de Beer-Lambert.

$$A = 6,5 \times 10^4 \times c, \text{ donc } A_{\text{max}} = 6,5 \times 10^4 \times c_{\text{max}}$$

$$c_{\text{m,max}} = c_{\text{max}} \cdot M(\text{Ag}) \text{ ou } c_{\text{max}} = \frac{c_{\text{m,max}}}{M(\text{Ag})}$$

$$A_{\text{max}} = 6,5 \times 10^4 \times \frac{c_{\text{m,max}}}{M(\text{Ag})}$$

$$c_{\text{m,max}} = \frac{A_{\text{max}} \cdot M(\text{Ag})}{6,5 \times 10^4}$$

$$c_{\text{m,max}} = \frac{0,9 \times 108 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{6,5 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}} = 1,5 \times 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{L}} = 1,5 \times 10^{-3} \times \frac{10^6}{10^3} \frac{\mu\text{g}}{\text{mL}} = 1,5 \mu\text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$$

Merci de nous signaler la présence d'éventuelles erreurs à labolycee@labolycee.org

Q1. Énoncer la deuxième loi de Newton et l'utiliser pour établir les expressions des coordonnées notées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point G selon les axes (Ox) et (Oy).

2^e loi de Newton : la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

Système : {le bâton} de masse m

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Le bâton n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m \cdot \vec{a} \quad \text{soit} \quad m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \quad \text{donc} \quad \vec{a} = \vec{g}.$$

En projection selon les axes (Ox) et (Oy) du repère choisi il vient :

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = g_x = 0 \\ a_y(t) = g_y = -g \end{cases}$$

Q2. Établir les expressions des coordonnées horizontales notée $v_x(t)$ et verticale $v_y(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point G.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{donc} \quad a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \quad \text{et} \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

$$\text{Ainsi en primitivant on obtient } \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -g \cdot t + Cte_2 \end{cases}$$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

$$\text{Coordonnées du vecteur vitesse initiale } \vec{v}_0 : \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ on a :

$$v_0 \cdot \cos(\alpha) = Cte_1$$

$$v_0 \cdot \sin(\alpha) = 0 + Cte_2$$

$$\text{Finalement : } \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Q3. À partir des expressions des coordonnées de la vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$ et de la figure 1, établir que les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$ du point G sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h \end{cases}$$

$$\text{À chaque instant } \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \quad \text{donc} \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{et} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\text{En primitivant on obtient } \overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + Cte_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + Cte_4 \end{cases}$$

Conditions initiales, à $t = 0$ s, le bâton est au point G($t = 0$) de coordonnées ($x(0) = 0$; $y(0) = h$) donc :

$$0 + Cte_3 = 0$$

$$0 + 0 + Cte_4 = h$$

$$\text{Finalement, on obtient les équations horaires } \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h \end{cases}$$

Q4. À l'aide des données et des équations horaires du mouvement, montrer que l'expression de l'équation de la trajectoire $y(x)$, x et y étant exprimés en mètres, s'écrit sous la forme : $y(x) = -0,27 x^2 + 0,58 x + 0,70$

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} + h$$

$$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + x \cdot \tan(\alpha) + h$$

$$y(x) = -\frac{9,8}{2 \times 4,9^2 \times \cos^2(30^\circ)} \cdot x^2 + x \cdot \tan(30^\circ) + 0,70$$

$$y(x) = -0,27 x^2 + 0,58 x + 0,70$$

$\frac{-9,8}{2 \times 4,9^2 \times \cos^2(30^\circ)}$	$-2.72108844E-1$
$\tan(30^\circ)$	$5.773502692E-1$

Dans la question suivante, le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

Q5. Vérifier que la partie est remportée par le joueur si le lancer est réalisé dans les conditions précisées dans les données précédentes.

Pour gagner le joueur doit faire tomber la quille 9 située à 3,0 m au niveau du sol.

Déterminons l'altitude y du centre d'inertie G du bâton pour cette distance x de 3,0 m.

$$y(3,0) = -0,27 \times 3,0^2 + 0,58 \times 3,0 + 0,70 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,0 \text{ cm.}$$

$-0.27 \times 3^2 + 0.58 \times 3 + 0.7$	$1E-2$
--	--------

Le bâton en étant à 1,0 cm du sol va bien renverser la quille 9 et permettre de remporter la partie.

```
[...]
14     Ecl=[ ]
15     Epl=[ ]
16     Eml=[ ]
17     for i in range(len(tl)) :
18         Ec=0.5*0.4*(vx[i]**2+vy[i]**2)
19         Ecl.append(Ec)
20         Ep=0.4*9.81*y[i]
21         Epl.append(Ep)
22         Em=
23         Eml.append(Em)
[...]
```

Figure 3. Extrait du programme Python permettant de tracer les différentes énergies du bâton de Mölkky en fonction du temps (E_{cl} , E_{pl} , E_{ml} sont exprimées en J ; v_x , v_y sont exprimées en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; y est exprimé en m).

Q6. À partir de la figure 3, déterminer la masse m du bâton de Mölkky. Justifier la réponse.

La ligne 18 donne la formule pour calculer l'énergie cinétique.

$$\text{Or } E_c = 0,5 \cdot m \cdot v^2$$

On en déduit que $m = 0,4 \text{ kg}$.

Q7. Écrire et compléter, sur votre copie, la ligne 22 du programme de la figure 3 qui permet de calculer l'énergie mécanique E_m du bâton de Mölkky.

$$E_m = E_c + E_p$$

La réponse $E_m = E_{cl}[i] + E_{pl}[i]$ est acceptée.

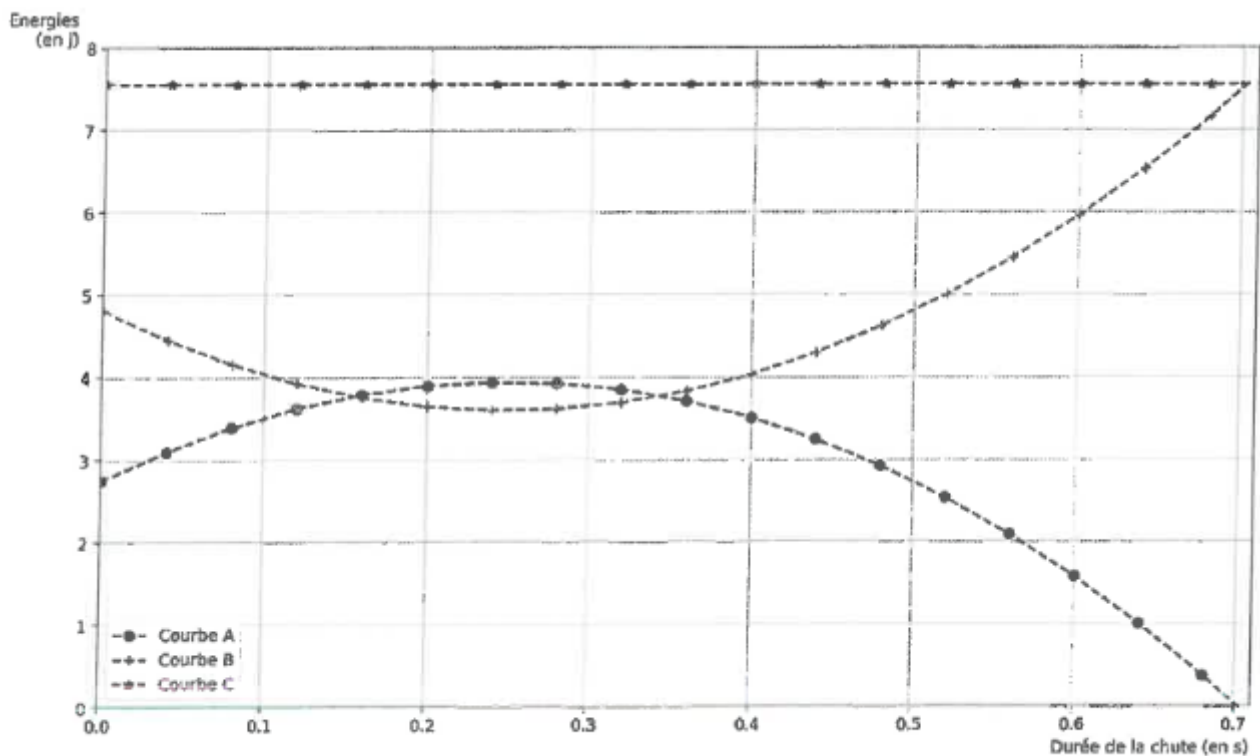


Figure 4. Évolution temporelle des énergies.

Q8. Attribuer chaque courbe de la figure 4 à l'énergie représentée. Justifier la réponse.

Au début du lancer, le bâton monte et perd de la vitesse.

$E_p = m \cdot g \cdot y$ avec y qui augmente donc E_p augmente : Courbe A

$E_c = 0,5 \cdot m \cdot v^2$ avec v qui diminue donc E_c diminue : Courbe B

$E_m = E_c + E_p$: courbe C

Q9. Déterminer la « durée de vol » du bâton de Mölkky (durée de chute) et en déduire que la partie décrite précédemment est remportée par le joueur, en considérant les équations horaires du mouvement établies dans la question Q3.

La chute s'arrête lorsque le bâton touche le sol, alors $E_p = 0$ J.

Par lecture graphique, cela se produit pour $t = 0,7$ s.

La durée du vol est de 0,7 s.

$$4.9 * \cos(30) * 0.7$$

$$2.970467135E0$$

$$x(0,7) = 4,9 \times \cos(30^\circ) \times 0,7 = 3,0 \text{ m}$$

Au bout de 0,7 s, le bâton a bien parcouru 3,0 m et il atteint la quille n°9.

Merci de nous signaler d'éventuelles erreurs à labolycee@labolycee.org

EXERCICE 3 (5 points)
PERFORMANCES DES BOLOMÈTRES DE PLANCK

Données :

- célérité de la lumière : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- différents domaines du spectre électromagnétique :

Nom du domaine	Rayon X	Ultraviolet	Visible	Infrarouge	Micro-onde	Radio
Domaine de longueur d'onde λ	de 0,01 à 100 nm	de 10 à 400 nm	de 400 à 800 nm	de 0,8 à 1 mm	de 1 à 300 mm	de 0,1 à 1 km

Le CMB se caractérise par un rayonnement thermique de température caractéristique $T_{\text{CMB}} = 2,725 \text{ K}$. Afin d'étudier les variations de température autour de cette valeur, le satellite Planck est équipé d'un bolomètre sensible au rayonnement de fréquence $f_0 = 217 \text{ GHz}$.

Q1. Calculer la longueur d'onde λ_0 correspondant à la fréquence f_0 et nommer le domaine du spectre auquel appartient l'onde électromagnétique associée au CMB.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{3,00 \times 10^8}{217 \times 10^9} = 1,38 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,38 \text{ mm}$$

$$\frac{3\text{E}8}{217\text{E}9} = 1.382488479\text{E}-3$$

D'après le tableau fourni, $\lambda_0 = 1,38 \text{ mm}$ se situe dans le domaine des **micro-ondes** (de 1 à 300 mm).

Données :

- la puissance P_{CN} reçue par une surface S soumise au rayonnement d'un corps à la température T_{CN} est donnée par : $P_{\text{CN}} = \sigma \cdot T_{\text{CN}}^4 \cdot S$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$;
- la surface de la partie sensible au CMB vaut $S_{\text{CMB}} = 9,93 \times 10^{-8} \text{ m}^2$. Pour étudier le CMB autour de la fréquence f_0 , un filtre est placé devant cette surface, il sélectionne 25,2 % de la puissance reçue.

Q2. Montrer que la puissance P_{CMB} reçue par le bolomètre de la part du CMB au travers du filtre vaut $P_{\text{CMB}} = 7,82 \times 10^{-14} \text{ W}$.

$$P_{\text{CN}} = \sigma \cdot T_{\text{CN}}^4 \cdot S_{\text{CMB}}$$

Après passage par le filtre, il ne reste que 25,2% de la puissance reçue, donc $P_{\text{CMB}} = \frac{25,2}{100} \times P_{\text{CN}}$

$$P_{\text{CMB}} = 0,252 \times \sigma \cdot T_{\text{CN}}^4 \cdot S_{\text{CMB}}$$

$$P_{\text{CMB}} = 0,252 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 2,725^4 \times 9,93 \times 10^{-8} = 7,82 \times 10^{-14} \text{ W}$$

$$0.252 * 5.67\text{E}-8 * 2.725^4 * 9.93\text{E}-8 = 7.82346015\text{E}-14$$

Cette partie sensible est en contact avec un thermostat plus froid qui permet d'évacuer l'énergie reçue, le matériau permettant le contact possède une résistance thermique $R_{contact}$.

CMB

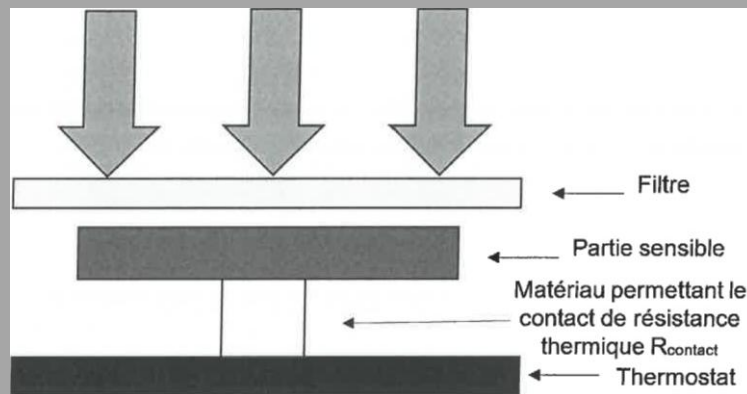


Schéma simplifié d'un bolomètre.

On cherche à modéliser l'évolution de la température de la partie sensible en fonction du temps par un bilan d'énergie. On note T_T la température du thermostat et T la température de la partie sensible du bolomètre.

Données :

- la puissance P_{syst} reçue par un système à la température T en contact avec un thermostat à la température T_0 par l'intermédiaire d'une résistance thermique R_{th} s'exprime :

$$P_{syst} = -\frac{(T_{syst} - T_0)}{R_{th}}$$

Q3. Exprimer la puissance reçue P_T par la partie sensible du bolomètre de la part du thermostat en fonction des grandeurs associées au bolomètre qui sont T , T_T et $R_{contact}$. Justifier le signe de la valeur de cette grandeur.

L'expression donnée $P_{syst} = -\frac{(T_{syst} - T_0)}{R_{th}}$, ici le système est la partie sensible à la température T

et le thermostat est à la température T_T alors on obtient : $P_T = -\frac{(T - T_T)}{R_{contact}}$.

Il est indiqué dans le sujet que la partie sensible est en contact avec un thermostat plus froid qui permet d'évacuer l'énergie reçue. Donc $T > T_T$, alors $T - T_T > 0$ et $-(T - T_T) < 0$.

$P_T < 0$ ainsi la partie sensible cède de la puissance plutôt qu'elle n'en reçoit.

L'expression reçue est bien mal choisie ici.

Q4. Exprimer le transfert thermique Q_{tot} échangé par la partie sensible du bolomètre avec l'ensemble des sources extérieures pendant une durée Δt en fonction de P_{CMB} , T , T_T , Δt et $R_{contact}$. On admettra que, pendant la durée Δt , la puissance reçue de la part du thermostat reste constante.

La partie sensible du bolomètre reçoit P_{CMB} à travers le filtre et cède P_T à travers le matériau de résistance $R_{contact}$.

$$P_{CMB} + P_T = \frac{Q_{tot}}{\Delta t} \quad (\text{où } P_T < 0 \text{ et } P_{CMB} > 0)$$

$$Q_{tot} = (P_{CMB} + P_T) \cdot \Delta t$$

$$Q_{tot} = \left(P_{CMB} - \frac{(T - T_T)}{R_{contact}} \right) \cdot \Delta t$$

Q5. Énoncer le premier principe de la thermodynamique en précisant le nom de chaque grandeur ainsi que leur unité.

La variation d'énergie interne ΔU d'un système est égale à la somme des transferts d'énergie sous forme de travaux W et sous forme de chaleur Q .

$$\Delta U = W + Q.$$

Toutes les énergies sont exprimées en joules.

On démontre que l'équation différentielle régissant l'évolution de la température en fonction du

temps est donnée par :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}} = \frac{P_{\text{CMB}}}{C_{\text{bolo}}} + \frac{T_T}{R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}}$$

Données :

- température du thermostat relié à la partie sensible : $T_T = 0,100 \text{ K}$;
- résistance thermique du matériau qui permet le contact entre la partie sensible du bolomètre et le thermostat : $R_{\text{contact}} = 3,75 \times 10^9 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$;
- capacité thermique de la partie sensible du bolomètre : $C_{\text{bolo}} = 0,40 \times 10^{-12} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- dans le système international d'unités, le watt est équivalent à des joules par seconde $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q6. Par une analyse dimensionnelle, montrer que la quantité $\tau = R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}$ est homogène à un temps, appelé temps caractéristique. Calculer sa valeur.

En utilisant les unités des grandeurs, avec R_{contact} en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ et C_{bolo} en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, alors le produit $R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}$ a pour unités $\text{K} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{J} \cdot \text{K}^{-1} = \text{W}^{-1} \cdot \text{J}$ or le Watt est équivalent à des joules par seconde alors

$$(\text{J} \cdot \text{s}^{-1})^{-1} \cdot \text{J} = \text{s}.$$

$$\tau = R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}$$

$$\tau = 3,75 \times 10^9 \times 0,40 \times 10^{-12} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ s} = 1,5 \text{ ms}$$

Q7. Sachant que la fonction $T(t) = T_T + T_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ est la solution de l'équation différentielle satisfaisant à la condition initiale $T(0) = T_T$, donner l'expression de T_1 ainsi que sa valeur.

Pour une durée très longue $t \rightarrow \infty$, alors $T(t \rightarrow \infty) = T_T + T_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right)$

$$T(t \rightarrow \infty) = T_T + T_1 \cdot (1 - 0)$$

$$T(t \rightarrow \infty) = T_T + T_1$$

$$T_1 = T(t \rightarrow \infty) - T_T$$

Après cette longue durée le système a atteint l'équilibre thermique, sa température ne varie plus

ainsi $\frac{dT}{dt} = 0$, et l'équation différentielle devient $\frac{T(t \rightarrow \infty)}{R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}} = \frac{P_{\text{CMB}}}{C_{\text{bolo}}} + \frac{T_T}{R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}}$.

On peut alors exprimer $T(t \rightarrow \infty)$.

$$T(t \rightarrow \infty) = R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}} \cdot \frac{P_{\text{CMB}}}{C_{\text{bolo}}} + R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}} \cdot \frac{T_T}{R_{\text{contact}} \cdot C_{\text{bolo}}}$$

$$T(t \rightarrow \infty) = R_{\text{contact}} \cdot P_{\text{CMB}} + T_T$$

$$\text{Or } T_1 = T(t \rightarrow \infty) - T_T \text{ donc } T_1 = R_{\text{contact}} \cdot P_{\text{CMB}} + T_T - T_T$$

$$T_1 = R_{\text{contact}} \cdot P_{\text{CMB}}$$

$$T_1 = 3,75 \times 10^9 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \times 7,82 \times 10^{-14} \text{ W}$$

$$T_1 = 2,93 \times 10^{-4} \text{ K}$$

$$3.75\text{E}9 * 7.82\text{E} -14$$

$$2.9325\text{E} -4$$

On admet que le bolomètre réalise une mesure de puissance fiable, dès que sa température se stabilise, au bout d'une durée égale à 5τ .

Afin d'étudier le CMB, le ciel est divisé en petites zones. Le satellite Planck balaie chaque zone pendant une durée $\Delta t_{\text{scan}} = 14 \text{ ms}$.

Q8. Montrer que le bolomètre du satellite Planck peut obtenir une mesure fiable du CMB.

En Q6. on a calculé $\tau = 1,5 \text{ ms}$ donc $5\tau = 5 \times 1,5 = 7,5 \text{ ms}$.

Cette durée de 5τ est inférieure à la durée de mesure du satellite ainsi la température du bolomètre a le temps de se stabiliser pendant la mesure.

Le bolomètre fait bien une mesure fiable du CMB.