

Partie A – Mise en évidence d'une sténose aortique

Données :

- Relation de Bernoulli : elle est valable pour un fluide parfait (sans viscosité) et incompressible, en écoulement permanent (indépendant du temps). On considère que le fluide n'est soumis qu'aux forces de pression et de pesanteur.

D'après cette relation, pour deux points A et B situés le long d'une même ligne de courant (voir **figure 1**) :

$$P_A + \rho \times g \times z_A + \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2 = P_B + \rho \times g \times z_B + \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2$$

P désigne la pression en un point et s'exprime en pascals (Pa), ρ est la masse volumique du fluide en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, g est l'intensité de la pesanteur en $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ et z représente l'altitude du point considéré et s'exprime en mètres (m).

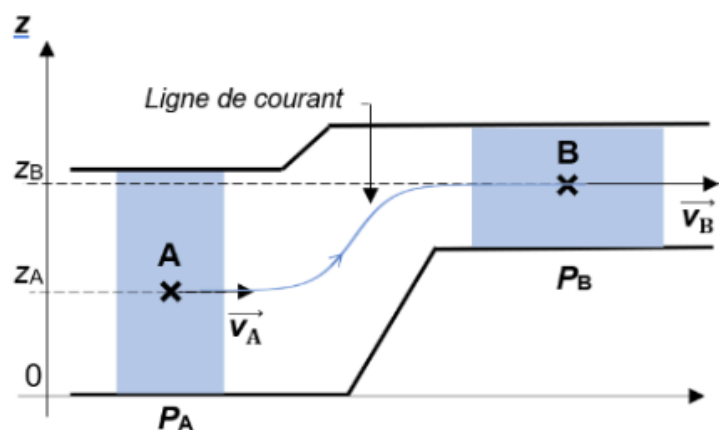


Figure 1 – Exemple de situation avec une ligne de courant représentée

- 1 mmHg correspond à la différence de pression entre deux points situés dans une colonne de mercure immobile et séparés d'une altitude de 1 millimètre.
- En statique des fluides, dans la relation de Bernoulli : $v_A = v_B = 0,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Masse volumique du sang : $\rho(\text{sang}) = 1,05 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Masse volumique du mercure : $\rho(\text{Hg}) = 13,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

1. À l'aide de la relation de Bernoulli appliquée à la statique des fluides, montrer que 1,00 mmHg correspond à une différence de pression de 133 Pa.

D'après la relation de Bernoulli, $P_A + \rho \times g \times z_A + \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2 = P_B + \rho \times g \times z_B + \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2$

En statique des fluides $v_A = v_B = 0$ alors $P_A + \rho \times g \times z_A = P_B + \rho \times g \times z_B$

$$P_B - P_A = \rho \times g \times z_A - \rho \times g \times z_B$$

$$P_B - P_A = \rho \times g \times (z_A - z_B)$$

Les points A et B sont séparés d'une altitude $z_B - z_A = 1 \text{ mm}$, le fluide a une masse volumique $\rho(\text{Hg}) = 13,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$$P_B - P_A = 13,6 \times 10^3 \times 9,81 \times (-1 \times 10^{-3}) = -13,6 \times 9,81 = -133 \text{ Pa}$$

On retrouve bien la différence de pression de 133 Pa.

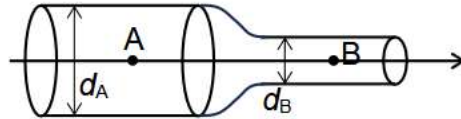


Figure 2 – Modélisation d'une valve aortique

Un rétrécissement aortique serré est défini par :

- une vitesse maximale du sang de valeur supérieure à $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en sortie de valve aortique ;
- une différence de pression supérieure à 50 mmHg à travers la valve aortique (selon les recommandations européennes) ;
- et une surface de la section de la valve aortique au niveau du rétrécissement (point B) inférieure à 1 cm^2 .

Lors d'un examen auprès d'un patient susceptible de présenter un rétrécissement aortique, on mesure, par échographie Doppler, les valeurs des vitesses de l'écoulement du sang aux points A et B situés sur une même ligne de courant. On obtient :

$$v_A = 1,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et } v_B = 4,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2. Déterminer la différence de pression $P_A - P_B$ en pascals, puis en mmHg.

D'après la relation de Bernoulli, $P_A + \rho \times g \times z_A + \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2 = P_B + \rho \times g \times z_B + \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2$

Avec $z_A = z_B$, alors $P_A + \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \times \rho \times v_B^2 - \frac{1}{2} \times \rho \times v_A^2$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \times \rho \times (v_B^2 - v_A^2) \text{ où } \rho = \rho(\text{sang})$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \times 1,05 \times 10^3 \times (4,2^2 - 1,0^2)$$

$$P_A - P_B = 8,736 \times 10^3 \text{ Pa} = 8,74 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$0.5 \times 1050 \times (4.2^2 - 1)$	
	8.736E3
Rep/133	
	6.568421053E1

1,00 mmHg correspond à une différence de pression de 133 Pa

$$P_A - P_B = 8,736 \times 10^3 \text{ Pa} / 133 = 65,7 \text{ mmHg}$$

Afin de déterminer la surface de la section de la valve aortique au niveau du rétrécissement (point B), on mesure par échographie le diamètre d_A à l'entrée de la valve aortique. Pour le patient précédent, on obtient : $d_A = 20,2 \text{ mm}$.

3. Justifier, à l'aide des résultats et des données précédentes, que le patient analysé a un rétrécissement aortique serré.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti : la démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

Un rétrécissement aortique serré est défini par :

- une vitesse maximale du sang de valeur supérieure à $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en sortie de valve aortique ;
- C'est le cas ici puisque $v_B = 4,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- une différence de pression supérieure à 50 mmHg à travers la valve aortique (selon les recommandations européennes) ;

C'est aussi le cas puisque $P_A - P_B = 65,7 \text{ mmHg}$

- et une surface de la section de la valve aortique au niveau du rétrécissement (point B) inférieure à 1 cm^2 .

Il faut donc déterminer la surface de la section en B.

On peut utiliser la conservation du débit volumique D_v entre A et B.

$$D_{VA} = D_{VB}$$

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$$

$$S_B = \frac{S_A \cdot v_A}{v_B}$$

$$S_B = \frac{\pi \cdot \left(\frac{d_A}{2}\right)^2 \cdot v_A}{v_B}$$

$$S_B = \frac{\pi \cdot \left(\frac{2,02 \text{ cm}}{2}\right)^2 \times 1,0 \text{ m.s}^{-1}}{4,2 \text{ m.s}^{-1}}$$

$$S_B = 0,76 \text{ cm}^2 < 1 \text{ cm}^2$$

La dernière condition est vérifiée, ainsi le patient présente bien un rétrécissement aortique serré.

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{2,02}{2}\right)^2}{4,2} = 7.630330157 \text{ E } -1$$

Partie B – Écoulement de Poiseuille

Le sang est un fluide réel et, dans divers cas, sa viscosité n'est pas négligeable.

Pour qu'un fluide réel s'écoule entre deux points, une différence de pression doit s'appliquer entre ces points.

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale de longueur L et de diamètre d , la différence de pression ΔP est proportionnelle au débit volumique D_v du fluide dans la conduite :

$$|\Delta P| = R \times D_v \quad \text{avec} \quad R = \frac{64 \times L \times \eta}{\pi \times d^4}$$

η est la viscosité du fluide, R la résistance à l'écoulement de la conduite et $|\Delta P|$ est la valeur absolue de la variation de pression ΔP .

On considère la situation simplifiée de la **figure 3** ci-contre.

Du sang parcourt une artère, se divise dans un réseau de plusieurs millions de capillaires, supposés identiques et situés à une altitude voisine, puis rejoint une veine.

On considérera que la résistance à l'écoulement du sang est uniquement due aux capillaires.

Données :

- Pression au sein de l'artère : $P_1 = 16,0 \times 10^3 \text{ Pa}$.
- Pression au sein de la veine : $P_2 = 1,3 \times 10^3 \text{ Pa}$.
- Résistance à l'écoulement d'un capillaire : $R = 1,0 \times 10^{16} \text{ S.I.}$

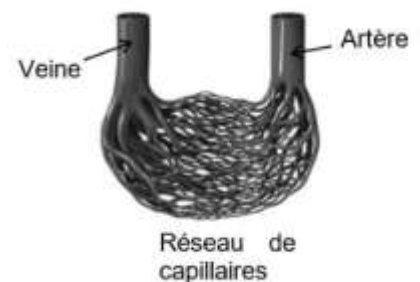


Figure 3 – Répartition du sang dans les capillaires
D'après www.concours-agro-veto.net

4. Expliquer pourquoi la résistance à l'écoulement du sang dans un capillaire est très supérieure à celle dans une artère ou dans une veine.

La résistance à l'écoulement est donnée $R = \frac{64 \times L \times \eta}{\pi \times d^4}$.

Pour une même longueur L , si d diminue alors la résistance à l'écoulement augmente.

La figure 3 montre que le diamètre d'une artère ou d'une veine est supérieur à celui d'un capillaire.

Ainsi on comprend pourquoi la résistance à l'écoulement du sang dans un capillaire est très supérieure à celle dans une artère ou dans une veine.

5. Calculer le débit volumique du sang dans un capillaire.

$$|\Delta P| = R \times D_V \text{ donc } D_V = \frac{|\Delta P|}{R} = \frac{P_1 - P_2}{R}$$
$$D_V = \frac{(16,0 - 1,3) \times 10^3}{1,0 \times 10^{16}} = 1,5 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

16-1.3	1.47E1
Rep*1E3	1.47E4
Rep/1E16	1.47E-12

Dans l'artère, le débit volumique du sang est de $5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

6. Montrer que le nombre N_c de capillaires parcourus par le sang est en accord avec la partie de phrase soulignée dans le texte introductif à gauche de la figure 3.

Le débit volumique de l'artère se répartit dans les N_c capillaires.

$$D_V(\text{capillaire}) = \frac{D_V(\text{artère})}{N_c}$$

$$N_c = \frac{D_V(\text{artère})}{D_V(\text{capillaire})}$$

$$N_c = \frac{5 \times 10^{-6}}{1,5 \times 10^{-12}} = 3 \times 10^6 \text{ capillaires}$$

5E-6/1.47E-12	3.401360544E6
---------------	---------------

Le texte introductif indique un réseau de plusieurs millions de capillaires, ce qui est en accord avec la valeur d'environ 3 millions de capillaires.

Merci de nous signaler la présence d'éventuelles erreurs à labolycee@labolycee.org