

Mathématiques : Amérique du Nord Jour 2 (22 mai 2025)

> **Exercice 1**

Partie A

1. La variable aléatoire N qui compte le nombre de paniers marqués par Victor suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,32$.

2. Calculons $P(N = 4)$

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4}$$

$$P(N = 4) \approx 0,206$$

3. Déterminons $P(N \leq 6)$:

À la calculatrice on obtient $P(N \leq 6) \approx 0,828$.

4. Calculons l'espérance

$$E(N) = n \times p$$

$$E(N) = 15 \times 0,32$$

$$E(N) = 4,8$$

5. a. Chaque panier marqué rapporte 3 points ainsi $T = 3N$.

b. $E(T) = E(3N)$

Par linéarité de l'espérance $E(T) = 3E(N)$

$$E(T) = 3 \times 4,8$$

$$E(T) = 14,4$$

A l'issue de 15 lancers, Victor peut espérer marquer en moyenne un total de 14,4 points.

c. $P(12 \leq T \leq 18) = P(12 \leq 3N \leq 18) = P\left(\frac{12}{3} \leq N \leq \frac{18}{3}\right) = P(4 \leq N \leq 6)$

A la calculatrice Numworks, on obtient $P(4 \leq N \leq 6) \approx 0,586$

Avec les autres modèles :

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N \leq 6) - P(N \leq 3)$$

$$P(4 \leq N \leq 6) \approx 0,828 - 0,242$$

$$P(4 \leq N \leq 6) \approx 0,586$$

Ainsi $P(12 \leq T \leq 18) \approx 0,586$



Partie B :

1. a. M_{50} représente la moyenne des points obtenus lors des 50 matchs.

b. Calculons l'espérance $E(M_{50})$ et la variance $V(M_{50})$:

$$E(M_{50}) = E(X) = 22$$

$$V(M_{50}) = \frac{V(X)}{50} = \frac{65}{50} = 1,3$$

c. D'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{50 \times 3^2}$$

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$$

d.

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(\{M_{50} \leq 19\} \cup \{M_{50} \geq 25\}) \leq \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(19 < M_{50} < 25) \leq \frac{13}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(19 < M_{50} < 25) \geq \frac{77}{90}$$

$$\Leftrightarrow P(19 < M_{50} < 25) > 0,85$$

2. D'après la loi des grands nombres :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Donc il existe un entier naturel n à partir duquel $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$. L'affirmation est fausse.

D'après la loi de concentration :

$$P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$$

$$\text{On souhaite } \frac{65}{9n} < 0,01 \Leftrightarrow 65 < 0,09n \Leftrightarrow n \geq 723$$

> **Exercice 2**

1. a. Calculons u_1 et u_2 :

$$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \text{ et } u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$$

b. À la calculatrice, la suite semble décroissante et sa limite semble être 1.

2. a. Soit la propriété P_n : pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation :

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 2 \text{ et } u_1 = \sqrt{2} \text{ ainsi } 1 \leq u_1 \leq u_0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel k c'est-à-dire $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$.

Montrons que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ est vrai.

Par hypothèse de récurrence on a pour $k \geq 0$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

La fonction racine carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$1 \leq \sqrt{u_{k+1}} \leq \sqrt{u_k}$$

$$1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

La propriété est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc pour tout entier naturel n ,
 $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b. D'après la question précédente, $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

De plus, $u_n \geq 1$, la suite (u_n) est minorée par 1.

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite décroissante et minorée converge.
Donc la suite (u_n) converge vers un réel $m \geq 1$.

c. On résout :

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

d. La fonction racine carré est continue en 1 alors d'après le théorème du point fixe,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l) \text{ avec } l \text{ solution de l'équation } f(x) = x.$$

Comme $u_n \geq 1$, alors $l = 1$ d'après la question précédente.

Partie B

1. a. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) \\ \Leftrightarrow v_{n+1} &= \ln(\sqrt{u_n}) \\ \Leftrightarrow v_{n+1} &= \frac{1}{2} \ln(u_n) \\ \Leftrightarrow v_{n+1} &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$

b. Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n$

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n &= \frac{\ln(2)}{2^n} \end{aligned}$$

c. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{2^n} &= \ln(u_n) \\ \Leftrightarrow \ln(2) &= 2^n \ln(u_n) \end{aligned}$$

2. a. $u_n \in]0,99; 1,01[$ pour $n \geq 7$ à la calculatrice.

Le plus petit entier naturel k recherché est $k = 7$.

$$u_7 \approx 1,00543$$

b. $x - 1$ est une approximation de $\ln(x)$ pour $x \in]0,99; 1,01[$

$$\begin{aligned} \ln(u_7) &\approx u_7 - 1 \\ \ln(u_7) &\approx 1,00543 - 1 \\ \ln(u_7) &\approx 0,00543 \end{aligned}$$

c. D'après 1.c, $\ln(2) = 2^7 \times \ln(u_7)$

$$\begin{aligned} \ln(2) &= 2^7 \times 0,00543 \\ \ln(2) &= 0,69504 \end{aligned}$$

3. $L = (2^{**n}) * \ln(a)$

> **Exercice 3**

Partie A

Affirmation 1 :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BC} \\ 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} \\ 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EH} \\ 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{JH} \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 :

Par propriété du cube, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$. Les points A, B, H et G sont coplanaires.
Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ ne forme pas une base de l'espace.

L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 :

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK}$$

A est le projeté orthogonal de K sur (IB)

$$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA}$$

Or i est le milieu de [AB] et AB = 1.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= -IB \times IA \\ \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est vraie.

Partie B

Affirmation 4 :

Le plan $\mathcal{P}$ admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ -3-0 \\ 7+1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 3 + (-1) \times (-3) + 3 \times 8 = 33$$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Ainsi le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

L'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 :

$\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Les deux plans ont le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$ est $2x - y + 3z + d = 0$ avec d un réel.

B appartient à $\mathcal{P}'$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$\begin{aligned} 2 \times 5 + 3 + 3 \times 7 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow 34 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -34 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}'$ est :

$$2x - y + 3z - 34 = 0$$

Ou encore

$$-2x + y - 3z + 34 = 0$$

L'affirmation 5 est vraie.

Affirmation 6 :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|-2 \times 2 + 0 - 3 \times (-1) + 34|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2}}$$

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{33}{\sqrt{14}} = \frac{33\sqrt{14}}{14}$$

L'affirmation 6 est fausse.

Affirmation 7 :

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles donc les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB) dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et passant par $A(2 ; 0 ; -1)$

$$(AB): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



(AB) et (d) sont sécantes si et seulement si il existe un couple $(k; t)$ solution du système S :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} -12 + 2k = 2 + 3t \\ 6 = -3t \\ 3 - 5k = -1 + 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 + 2k = -4 \\ t = -2 \\ 3 - 5k = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le système S admet un unique couple $(4; -2)$ comme solution. Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes.

L'affirmation 7 est fausse.

> Exercice 4

Partie A

1. a. La fonction f est définie et dérivable sur $[0; \pi]$ comme produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; \pi], f'(x) &= e^x \times \sin(x) + e^x \times \cos(x) \\ f'(x) &= e^x(\sin(x) + \cos(x)) \end{aligned}$$

1. b.

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], e^x &> 0 \\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 &\leq \cos(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi, par produit, $f'(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. a. L'équation de la tangente T à C en $a = 0$ est donnée par :

$$y = f'(x)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = e^0(\sin 0 + \cos 0) = 1 \quad \text{et} \quad f(0) = e^0 \sin 0 = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{Ainsi } T : y = 1(x - 0) + 0$$

$$T : y = x$$

$$2. b. \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], e^x > 0$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(x) \leq 1$$

Donc

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f''(x) > 0 \text{ par produit.}$$

Ainsi la fonction f est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. c. f est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc la courbe représentative C est située au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle. En particulier en $x = 0$, C est au-dessus de T ainsi :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) \geq x \Leftrightarrow \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], e^x \sin(x) \geq x$$

$$3. f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos(x) \leq 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x) \leq 0$.

$f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ donc C admet un point d'inflexion en $x = \frac{\pi}{2}$.

Partie B

1. On pose $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = e^x$, deux fonctions dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = e^x$ sont deux fonctions continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de l'intégration par partie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx = [-e^x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^x \cos(x) dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= [-e^x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + J \\ I &= -e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 \cos(0) + J \\ I &= 0 + 1 \times 1 + J \\ I &= 1 + J \end{aligned}$$

On pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$, deux fonctions dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos(x)$ sont deux fonctions continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de l'intégration par partie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx = [e^x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= [e^x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - J \\ I &= e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0 \sin(0) - J \\ I &= e^{\frac{\pi}{2}} \times 1 - 1 \times 0 - J \\ I &= e^{\frac{\pi}{2}} - J \end{aligned}$$

2. Exprimons J en fonction de I



$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - J \Leftrightarrow J = e^{\frac{\pi}{2}} - I$$

Par substitution :

$$I = 1 + J \Leftrightarrow I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \Leftrightarrow 2I = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

3. On a démontré que $e^x \sin(x) \geq x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) \geq g(x)$$

Ainsi l'aire du domaine du plan situé entre C_f, C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ est :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx$$

exprimée en unités d'aire.

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx &= I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx &= I - \left(\frac{\pi^2}{8} - 0 \right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx &= \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

L'aire du domaine du plan situé entre C_f, C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ vaut

$$\frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ u. a.}$$