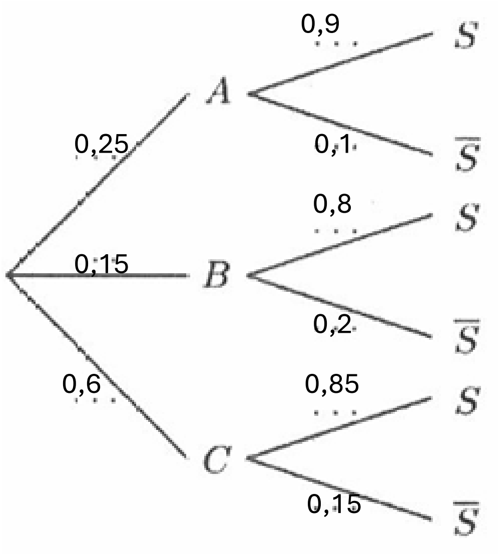
Mathématiques : Amérique du Nord Jour 1 (21 mai 2025)

> **Exercice 1**

Partie A

1.



2. Calculons $P(B \cap S)$

$$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S)$$
$$P(B \cap S) = 0{,}15 \times 0{,}8$$
$$P(B \cap S) = 0{,}12$$

La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est de 0,12.

3. $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S})$

$P(C \cap \bar{S}) = 0{,}6 \times 0{,}15$
$P(C \cap \bar{S}) = 0{,}09$
La probabilité que la connexion ne soit pas stable et passe par le serveur C est de 0,09.

4. $A \cap B \cap C = \emptyset$ et $A \cup B \cup C = \Omega$
Ainsi A, B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$$
$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B \cap S) + P(C) \times P_c(S)$$
$$P(S) = 0{,}25 \times 0{,}9 + 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}85$$
$$P(S) = 0{,}855$$

5. Calculons $P_S(B)$:

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}12}{0{,}855} \approx 0{,}140$$

La probabilité que la connexion ait lieu depuis le serveur B sachant qu'elle est stable est de 0,14.

Partie B :

1. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}145$.

b. On calcule $P(X \leq 8)$:

$$P(X \leq 8) \approx 0{,}704$$

La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est de 0,704.

2. a. $p_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0)$
$p_n = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}145^0 \times 0{,}855^n$
$p_n = 1 - 0{,}855^n$

b. On résout $p_n \geq 0{,}99$

$$1 - 0{,}855^n \geq 0{,}99$$
$$\Leftrightarrow 0{,}855^n \leq 0{,}01$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow n\ln(0{,}855) \leq \ln(0{,}01)$$

$\ln(0{,}855) < 0$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}855)}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 30$$

La plus petite valeur de n telle que $p_n \geq 0{,}99$ est $n = 30$.

3. a. Par linéarité de l'espérance :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{n \times 0{,}145}{n} = 0{,}145$$

b. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}1) \leq \frac{V(X_n)}{0{,}1^2}$$
$$\Leftrightarrow P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{\frac{0{,}123975}{n}}{0{,}1^2}$$
$$\Leftrightarrow P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}3975}{n}$$
$$\Leftrightarrow P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{n}$$

c. Calculons P($|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1$) :

$$P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{1000}$$
$$\Leftrightarrow P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq 0{,}0125$$

La probabilité que F_{1000} soit en dehors de l'intervalle $]0{,}045; 0{,}245[$ est inférieur à 0,0125.

Or $F_{1000} = 0{,}3$. Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement.

> **Exercice 2**

1. Calculons u_1 :

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2}$$

$$u_1 = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2}$$

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{5}{4}}$$

2. a. $a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1}$

$\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{2-1} = 2}$

$a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1}$

$\boldsymbol{a_1 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = 5}$

b. pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$$

$$a_{n+1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}$$

$$a_{n+1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$a_{n+1} = \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1}$$

$$a_{n+1} = 3 \times \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{u_n - 1}{u_n - 1}$$

$$a_{n+1} = 3\, a_n - 1$$

c. Soit la propriété P_n : pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 3n - 1$.

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 1$: $3 \times 1 - 1 = 2$ et $a_1 = 5$

Ainsi $a_1 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 1.

<u>Hérédité :</u>

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel k supérieur ou égal à 1 c'est-à-dire $a_k \geq 3k - 1$.

Montrons que $a_{k+1} \geq 3(k+1) - 1$ est vraie c'est-à-dire $a_{k+1} \geq 3k + 2$.

Par hypothèse de récurrence on a pour $k \geq 1$:

$$a_k \geq 3k - 1.$$

$$3 \times a_k \geq 3 \times (3k - 1)$$

$$3a_k - 1 \geq 3(3k - 1) - 1$$

$$a_{k+1} \geq 9k - 4$$

Comparons $9k - 4$ et $3k + 2$:

$$9k - 4 - (3k + 2) = 6k - 6 = 6(k - 1)$$

Or $k \geq 1 \iff k - 1 \geq 0 \iff 6(k - 1) \geq 0$ ainsi $9k - 4 \geq 3k + 2$

Donc $a_{k+1} \geq 9k - 4 \geq 3k + 2$

La propriété est vraie au rang $k + 1$.

<u>Conclusion :</u>

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc $a_n > 3n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -1 = -1$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n - 1 = +\infty$

Et $a_n \geq 3n - 1$.

D'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty}$

3. a. Pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

$$\iff a_n(u_n - 1) = u_n$$

$$\iff a_n \times u_n - a_n = u_n$$

$$\iff a_n \times u_n - u_n = a_n$$

$$\iff u_n(a_n - 1) = a_n$$

$$\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$$

b. $u_n = \frac{a_n}{a_n\left(1-\frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{a_n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{a_n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{a_n} = 1 \ par\ somme$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{a_n}} = 1$ par quotient.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

4. a. L'algorithme renvoie le rang n et la valeur du terme u_n pour lequel l'écart entre u_n et sa limite 1 est inférieur à p.

b. A la calculatrice on obtient $\boldsymbol{n = 9}$.

> **Exercice 3**

<u>Affirmation 1 :</u>

Une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est $\begin{cases} x = 0 \\ y = k, k \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

Cherchons s'il existe un point d'intersection entre la droite (d) et l'axe des ordonnées :

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2t = 0 \\ -1 = k \\ 2-6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1{,}5 \\ k = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$

Il n'existe pas d'unique couple $(k;t)$ solution du système S donc la droite (d) et l'axe des ordonnées sont non coplanaires.

L'affirmation 1 est vraie.

<u>Affirmation 2 :</u>

D'après la représentation paramétrique de la droite (d), le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ dirige (d).

N'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est normal au plan en particulier $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d un réel.

Une équation cartésienne du plan est $x + 3z + d = 0$

Le point $A(3;-3;-2)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation précédentes.

$$3 + 3\times(-2) + d = 0 \Leftrightarrow -3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$$

Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est :

$$x + 3z + 3 = 0$$

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Exprimons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-3\\-4+3\\-1+2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$

Déterminons les coordonnées du point C :

$$\begin{cases}2 = 3-2t\\ y=-1\\ z=2-6t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\ y=-1\\ z=2-6\times\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=0{,}5\\ y=-1\\ z=-1\end{cases}$$

Ainsi $C(2;-1;-1)$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-3\\-1+3\\-1+2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}}z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-1)+(-1)\times 2+1\times 1$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$ donc l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus et ne peut donc pas valoir $\frac{\pi}{6}$ radians.

L'affirmation 3 est fausse.

Facultatif :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = -\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$
$$\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$$

Affirmation 4 :

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (BH) orthogonale au plan $\mathcal{P}$, i .e. dirigée par $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan, et passant par B.

(BH) : $\begin{cases}x=5+t\\ y=-4\\ z=-1+3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Les coordonnées de H sont solutions du système S' : $\begin{cases}x=5+t\\ y=-4\\ z=-1+3t\\ x+3z-7=0\end{cases}$

$$S' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t \\ 5 + t + 3(-1 + 3t) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -4 \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont $H\left(\frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2}\right)$

Calculons BH :

$$BH = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 + (-4 + 4)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2}$$

$$BH = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Avec la formule de la distance d'un point à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(B, \mathcal{P}) = BH = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$BH = \frac{|1 \times 5 + 3 \times (-1) + (-7)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$BH = \frac{|-5|}{\sqrt{10}}$$

$$BH = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

> **Exercice 4**

Partie A

1. Le signe de la fonction g' donne les variations de la fonction g.

Graphiquement on a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
C_2		$-$	0	$+$	0	$-$	
C_1		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi C_2 est la courbe de g' et C_1 est la courbe de g.

2. Graphiquement, on lit $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est donnée par :

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$
$$y = 2x + 1$$

Partie B

1. La fonction f_0 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

$$f_0'(x) = (2x + 3)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 3x)$$

Ainsi :

$$f_{0(x)} + f_0'(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (2x + 3)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 3x)$$
$$\Leftrightarrow\ f_{0(x)} + f_0'(x) = (2x + 3)e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow f_0 \text{ est solution de } (E)$$

2. Résolvons (E_0) :

$$y' + y = 0\ \Leftrightarrow y' = -y$$

Les solutions de cette équations différentielles sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-x}, k \in \mathbb{R}$

3. Par application directe du cours, les solutions de (E_0) sont :

$$f(x) = ke^{-x} + f_0(x)$$

$$f(x) = ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$$
$$f(x) = (x^2 + 3x + k)e^{-x}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

4. On sait que $g(0) = 1\ \Leftrightarrow (0^2 + 3 \times 0 + k)e^{-0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x + 3)e^{-x} - f(x)$

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + k)e^{-x}$$
$$f'(x) = (-x^2 - x + 3 - k)e^{-x}$$

Et

$$f''(x) = (-2x - 1)e^{-x} - (-x^2 - x + 3 - k)e^{-x}$$
$$f''(x) = (x^2 - x + k - 4)e^{-x}$$

La courbe des fonctions solutions de (E) admettent deux points d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde des fonctions s'annule en changeant de signe deux fois.
Etudions le signe de $f''(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

$f''(x)$ est du signe de $(x^2 - x + k - 4)$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (k-4)$$
$$\Delta = 17 - 4k$$

$x^2 - x + k - 4$ s'annule deux fois en changeant de signe si et seulement si $\Delta > 0$

$$17 - 4k > 0 \iff 17 > 4k \iff k < \frac{17}{4}$$

Les fonctions solutions de (E) dont la courbe admet deux points d'inflexion sont les fonctions $f_k(x) = (x^2 + 3x + k)e^{-x}$, avec $k < \frac{17}{4}$.

Partie C

1. Développons $f(x)$:

$$f(x) = x^2e^{-x} + 3xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x} = 0$ par produit.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ par composée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$ par produit.

Ainsi par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{-x} + 3xe^{-x} + 2e^{-x}) = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. a. Pour tout réel x :

$$f'(x) = (2x+3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2) \times (-e^{-x})$$
$$f'(x) = (-x^2 - 3x + 2x - 2 + 3)e^{-x}$$
$$f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$$

b. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, par propriété des exponentielles.
Donc $f'(x)$ a le même signe que le polynôme du second degré $-x^2 - x + 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$$

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
Le polynôme (et donc $f'(x)$) est du signe de son coefficient a = -1 à l'extérieur des racines :

Dressons le tableau de signe $f'(x)$ et de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

$f(x_1) = f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 2{,}3$ et $f(x_2) = f\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx -1{,}2$

3. Pour tout réel x positif :

- $x^2 + 3x + 2$ est une somme de termes positifs ou nuls donc $x^2 + 3x + 2 \geq 0$.
- e^{-x} est strictement positif.

Donc $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ est positive sur $[0\,;\, +\infty[$ par produit de facteurs positifs.

4. Soit $\alpha > 0$:

La fonction f est continue et positive sur $[0;\ \alpha]$. L'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ est égale à $\int_0^\alpha f(x)dx$ exprimée en u.a.

Par définition $\int_0^\alpha f(x)dx = F(\alpha) - F(0)$

$$\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7 \text{ u.a.}$$