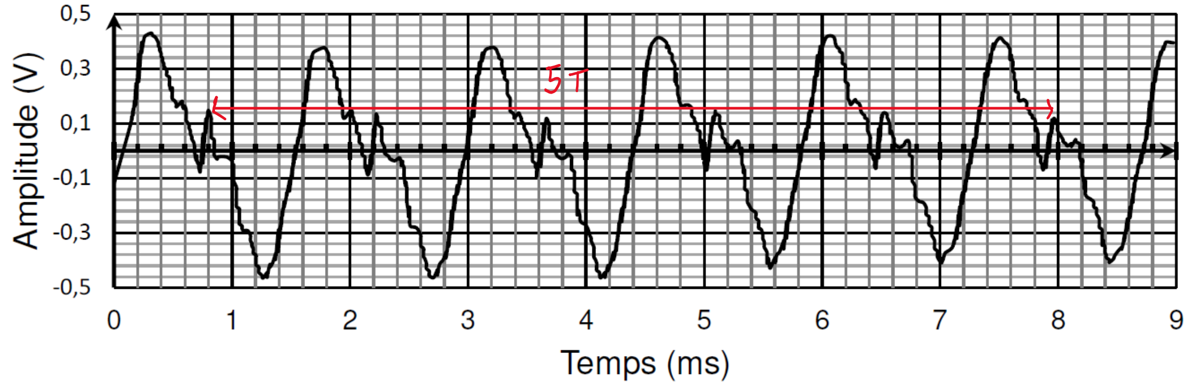
PC-Maths STI2D : Métropole (19 juin 2024)

> Exercice 1 – Concert musical

Q1. Mesurons la période du signal sur la figure 1



On mesure 5T = 7,2 ms
donc

$$T = 1{,}44\ ms = 1{,}44.10^{-3}\ s$$

Et $f = \frac{1}{T}$

$$f = \frac{1}{1{,}44.10^{-3}} = 694\ Hz$$

La fréquence du signal représenté sur la figure 1 est de 694 Hz. Il s'agit d'un Fa4.

Q2. Sur le spectre en fréquence de la figure 2, on visualise plusieurs pics : une fréquence fondamentale et des harmoniques. Le son associé à ce spectre n'est pas un son pur. Dans le cas d'un son pur, le spectre n'est composé que d'un seul pic à la fréquence fondamentale.

Q3. Le fondamental est le premier pic du spectre en fréquence.

$$f_1 = 110\ Hz$$

D'après le tableau donné, une fréquence de 110 Hz correspond à la note La1.

Q4. Déterminons le niveau sonore maximal associé à la norme en vigueur :

$$L_{max} = 10 \log\left(\frac{I_{max}}{I_0}\right)$$

$$L_{max} = 10\ \log\left(\frac{3{,}1.10^{-2}}{1{,}0.10^{-12}}\right)$$

$$L_{max} = 105\ dB$$

Le niveau sonore mesuré au niveau des spectateurs est de 100 dB. Le niveau sonore maximal fixé par la norme relative à la prévention des risques liés au bruit est de 105 dB. Le niveau sonore mesuré lors du concert respecte la norme.

Q5. En dérivant $f(x)$ on a pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{10}{x}$$

Q6. Résolvons l'équation $f_m(x) = g_m(x)$:

$$148 - 10\ln(x) = 136 - 7{,}5\ln(x)$$
$$\Leftrightarrow 148 - 136 = 10\ln(x) - 7{,}5\ln(x)$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5\ln(x) = 12$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{12}{2{,}5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 4{,}8$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{4{,}8}$$
$$\Leftrightarrow x \approx 121{,}5$$

$$S = \{121{,}5\}$$

Les deux notes ont le même niveau sonore pour une distance $d_m = 121{,}5\ m$.

Q7. Calculons le niveau sonore correspondant :

$$f_m(121{,}5) = 148 - 10\ln(121{,}5)$$
$$f_m(121{,}5) = 100$$

$$g_m(121{,}5) = 136 - 7{,}5\ln(121{,}5)$$
$$g_m(121{,}5) = 100$$

Le niveau sonore reçu par les spectateurs à la distance d_m des enceintes est de 100 dB pour chaque note.

> **Exercice 2 – utilisation du Cobalt 60 en médecine**

Q1. Il existe 3 types de rayonnement radioactif :

- le rayonnement α
- le rayonnement β : il existe sous deux formes β^- et β^+
- le rayonnement γ

Le Cobalt 60 se transforme en Nickel 60 par désintégration β^-. La particule émise est un électron ${}_{-1}^{0}e$.

Q2. L'énergie d'un photon (en J) est donnée par la relation $E = h \times \nu$
h : constante de Planck (S.I.)
ν : fréquence de l'onde (en Hz)

$$\nu = \frac{E}{h}$$

$$\nu = \frac{2{,}13.10^{-13}}{6{,}63.10^{-34}}$$

$$\nu = 3.21.10^{20}\ Hz$$

Déterminons la longueur d'onde λ de ce rayonnement :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

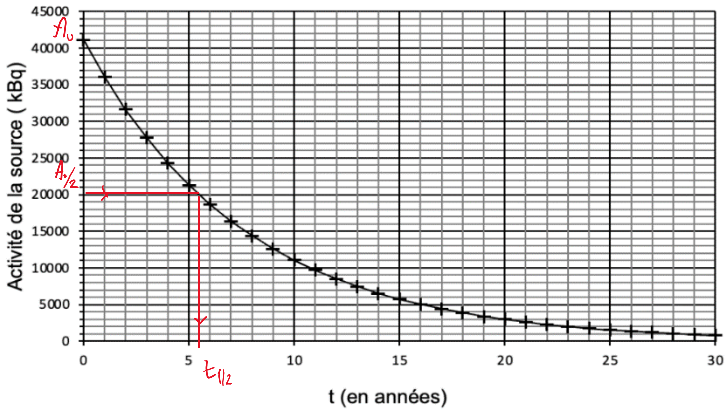
$$\lambda = \frac{3{,}00.10^{8}}{3{,}21.10^{20}}$$

$$\lambda = 9{,}34.10^{-13}\ m$$

Q3. L'activité d'une source radioactive est le nombre de désintégrations de la source par seconde. Elle s'exprime en Becquerel (Bq) et se note A.

D'après le document 1, à $t = 0$ l'activité initiale du Cobalt 60 est $A_0 = 41\ 000\ kBq$.

Q4. Le temps de demi-vie est la durée nécessaire pour que l'activité de l'échantillon diminue de moitié. On le détermine en se plaçant à $\frac{A_0}{2}$ sur le document 1.
À $\frac{A_0}{2} = 20\ 500\ kBq$, on mesure $t_{\frac{1}{2}} = 5{,}5\ ans.$



Q5. On considère que l'activité de la source est négligeable au bout de 10 demi-vies

$$10 \times t_{\frac{1}{2}} = 10 \times 5{,}5 = 55$$

L'activité de l'échantillon de Cobalt 60 est négligeable au bout de 55 ans.

Cette durée est très courte à l'échelle géologique. Les noyaux de Cobalt 60 ne sont pas présents dans la nature.

> **Exercice 3 – Mathématiques**

Question 1

$g(t) = 2$ et $g'(t) = 0$

$$-5 \times g(t) + 10 = -5 \times 2 + 10 = 0 = g'(t)$$

La fonction $g(t) = 2$ est solution de (E).

Question 2

Les solutions des équations différentielles $y' = ay + b$ sont les fonctions $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

$$a = -5 \;\; et \; b = 10$$

Les fonctions solutions de (E) sont :

$$f(t) = ke^{-5x} - \frac{10}{-5}$$

$$f(t) = ke^{-5x} + 2$$

Question 3

À $t = \; 0$ on a $v(0) = 50$

$$50 = ke^{-5\times 0} + 2 \;\; \Leftrightarrow 50 = k + 2 \;\; \Leftrightarrow k = 48$$

Ainsi sur [0 ; +∞[: $v(t) = 48e^{-5t} + 2.$

Question 4

$$\int_0^{10} (48e^{-5t} \; + 2)dt = \left[\frac{48}{-5}e^{-5t} + 2t\right]_0^{10}$$

$$\int_0^{10} (48e^{-5t} \; + 2)dt = -9{,}6e^{-50} + 20 - (-9{,}6e^{0})$$

$$\int_0^{10} (48e^{-5t} \; + 2)dt = 29{,}6$$

Le parachutiste parcourt 29,6 m pendant les 10 premières secondes après ouverture de son parachute.

> **Exercice 4 – Limitation de vitesse et climat**

Q1. Par définition $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$$m = 1260\ kg$$
$$v = 110\ km.h^{-1} = 30{,}6\ m.s^{-1}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 1260 \times 30{,}6^2$$

$$E_c = 5{,}88.10^5\ J$$

$$E_c = \frac{5{,}88.10^5}{3{,}6.10^3}$$

$$E_c = 163\ Wh$$

Q2.

$$\frac{228 - 163}{228} = 28{,}5\ \%$$

En diminuant de 20 km.h^{-1} la vitesse d'un véhicule, on diminue son énergie cinétique de 28,5%
En réduisant l'énergie que possède le véhicule on réduit les dégâts qu'il peut causer lors d'un accident.

Q3. D'après la définition du travail d'une force de frottement :

$$W = -F \times AB$$

Avec AB la distance sur laquelle s'applique la force de frottement F.

$$W = -kv^2 \times AB$$
$$W = -0{,}404 \times \left(\frac{110}{3{,}6}\right)^2 \times 100.10^3$$
$$W = -3{,}77\,.\,10^7\ J$$

$$W \approx -38MJ$$

Q4. Calculons le pourcentage d'évolution du travail de la force de frottement en passant de 130 km/h et 110 km/h :

$$\frac{-38 - (-53)}{-53} = 28{,}3\%$$

Une baisse de 20 km/h entraine une baisse de 28% de l'énergie nécessaire pour compenser la force de frottement.

Q5. D'après le document 1, à la vitesse de 110 km/h et en 5ème la voiture consomme 6L.
À 130 km/h, la voiture consomme 7,2 L/ 100 km.

$$7{,}2 - 6 = 1{,}2$$

Sur 100 km, on économise 1,2 L de carburant en diminuant sa vitesse de 130 à 110 km/h.

Q6. En diminuant la vitesse de 20 km/h, l'énergie compensant les frottements baisse de 28% et la consommation d'essence baisse de 17%. L'écart observé montre que la consommation d'essence ne dépend pas seulement des forces de frottements.

Q7. Déterminons la quantité de matière en octane :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\rho \times V}{M}$$

$$n = \frac{750 \times 1{,}2}{114}$$

$$n = 7{,}9 \; mol$$

Dans 1,2 L d'octane, il y a 7,9 mol d'octane.

Q8. D'après la stœchiométrie de la réaction :

$$\frac{n_{C_8H_{18}}}{1} = \frac{n_{CO_2}}{8}$$

$$n_{C_8H_{18}} = \frac{n_{CO_2}}{8}$$

Q9. On a $n_{CO_2} = 8n_{C_8H_{18}}$

$$n_{CO_2} = 8 \times 7{,}9$$
$$n_{CO_2} = 63 \; mol$$

La consommation de 1,2 L d'octane produit 63 mol de dioxyde carbone.

Q10.

$$m_{CO_2} = n_{CO_2} \times M_{CO_2}$$
$$m_{CO_2} = 63 \times 44$$
$$m_{CO_2} = 2772 \; g$$
$$m_{CO_2} = 2{,}8 \; kg$$

En diminuant sa vitesse de 20 km/h, on réduit la production de dioxyde de carbone de 2,8 kg pour 100 km parcourus.

Q11. $\frac{83.10^9}{100} \times 2{,}8 = 2{,}3.10^9 \; kg = 2{,}3.10^6 tonnes$

On peut estimer à 2,3 millions de tonnes la masse de CO_2 qui ne serait pas rejetée dans l'atmosphère grâce à la diminution de la vitesse.

Q12. $\frac{2,3.10^6}{8} = 290\ 000$

Une métropole française a une masse de CO_2 équivalente à ce que représente le gain réalisé par cette limitation de vitesse.