Mathématiques : Polynésie Septembre 2024 Jour 1

> **Exercice 1**

1. On calcule $P(E \cap B)$:

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B)$$
$$P(E \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}75$$
$$P(E \cap B) = 0{,}45$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est de 0,45.

2. Les évènements E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(E \cap B) + P(\bar{E} \cap B)$$
$$P(B) = P(E \cap B) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(B)$$
$$P(B) = 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}52$$
$$P(B) = 0{,}658$$

3. On calcule $P_B(E)$:

$$P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$
$$P_B(E) = \frac{0{,}45}{0{,}658}$$
$$P_B(E) \approx 0{,}684$$

La probabilité qu'un acheteur choisisse un véhicule tout-électrique sachant qu'il a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est de 0,684.

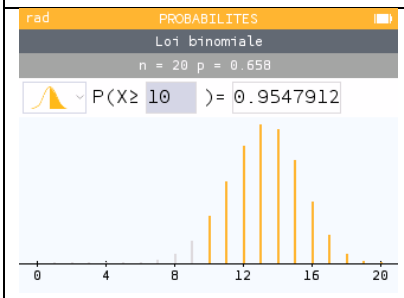
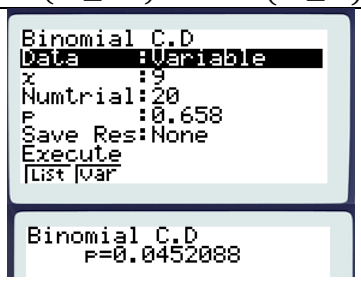
4. a. Un acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile ou pas est une épreuve de Bernoulli dont le succès « L'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile » a une probabilité $p = 0{,}658$.
On répète 50 fois de manière identique et indépendante cette expérience. On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}658$.
Ainsi la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}658$.

b. Calculons $P(X = 8)$ avec la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0{,}658^8 \times (1 - 0{,}658)^{20-8}$$

$$P(X = 8) \approx 0{,}011$$

c. Calculons $P(X \geq 10)$ à la calculatrice :

Sur Numworks :	Sur TI : (binomFrép) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$	Sur Casio : (Bcd) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
		

$P(X \geq 10) = 1 - 0{,}045$

$$P(X \geq 10) = 0{,}954$$

d. Pour une loi binomiale de paramètres n et p, on a $E(X) = n \times p$

$$E(X) = 20 \times 0{,}658$$

$$E(X) = 13{,}16$$

e. Soit Y la variable aléatoire qui compte le coût total de l'installation d'une borne de recharge au domicile des acheteurs. Ainsi $Y = 1200X$.

La somme moyenne à prévoir est donnée par $E(Y)$:

$$E(Y) = E(1200X)$$

Par linéarité de l'espérance on a :

$$E(Y) = 1200\, E(X)$$

$$E(Y) = 1200 \times 13{,}16$$

$$E(Y) = 15792$$

En moyenne, la directrice peut prévoir d'engager 15 792€ pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules.

> **Exercice 2**

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

L'affirmation A est vraie.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$-2 \in]-\infty;+\infty[$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

L'affirmation B est fausse.

2. $\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} = \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right) = -1$

Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}$.

L'affirmation C est vraie.

3. Etudions le signe de $k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2+1} > 0$ donc $k(x) > 0$
Une primitive de $k(x)$ sur $\mathbb{R}$ est donc strictement croissante.

L'affirmation D est fausse.

4. Vérifions si $g(x)$ est solution de (E) :

$$g(0) = 4e^{-\frac{1}{3}\times 0} + 1$$
$$g(0) = 5$$

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \times 4e^{-\frac{1}{3}x} = -\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$$

Ainsi :

$$3g'(x) + g(x) = 3 \times \left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

$$3g'(x) + g(x) = -4e^{-\frac{1}{3}x} + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

$$3g'(x) + g(x) = 1$$

$g(x)$ est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0)=5$.

L'affirmation E est vraie.

5. Soient $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$.
Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = (-e^{-1} + 0) - (e^{-1} - 1)$$
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - 2e^{-1}$$

L'affirmation F est vraie.

> **Exercice 3**

1. Dans une pyramide à étages, le 1er étage est composé d'1 boule, le 2ème étage est composé de 4 boules, le 3ème étage est composé de 9 boules et le 4ème étage est composé de 16 boules.

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Une pyramide à 4 étages est composée de 30 boules.

2. a. Calculons S_5 :

$$S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$
$$S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$S_5 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$
$$S_5 = 55$$

b.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

-2 est une racine évidente de $2n^2+7n+6$. Le polynôme se factorise par $(n+2)$.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+2+1)}{6}$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

d. Soit $P(n)$ la propriété : $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n\geq 1$.

Initialisation :

$S_1=1$ et $\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1$

$P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété P(n) vraie pour un entier naturel n non nul.

C'est-à-dire $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que P(n+1) est vraie c'est-à-dire :

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$S_n+u_{n+1}^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+u_{n+1}^2$$
$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire donc $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n\geq 1$.

3. On cherche la solution de l'équation $S_n=200$.
   À la calculatrice, on obtient $S_7=140$ et $S_8=204$.
   Un marchand souhaitant disposer des oranges en pyramide à base carrée et possédant 200 oranges peut construire une pyramide à 7 étages maximum. Il utilise 140 oranges et il lui en reste 60.

> **Exercice 4**

1. Les coordonnées des points E et C dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont :
$E(0; 0; 1)$ et $C(1; 1; 0)$

2. a. Première méthode :
$\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$ par propriété dans le carré ABCD
$\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{DH}$ par propriété dans le cube ABCDEFGH et $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AE}$.
Ainsi $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (GEA) donc $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

Deuxième méthode :
$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\1-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$
Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GA}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DB} = -1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times 0 = -1 + 1 = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{GE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DB}$.

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{DB} = -1 \times 1 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 0 = -1 + 1 = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{GA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DB}$.
$\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

b. Une équation cartésienne du plan (GEA)de vecteur normal $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ passant par $A(0\ ;0\ ;0\ )$ est :

$$1 \times x - 1 \times y + 0 \times z + c = 0$$
$$x - y + c = 0$$

Les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne du plan (GEA) :

$$0 - 0 + c = 0$$
$$c = 0$$

Une équation cartésienne du plan (GEA) est $x - y = 0$.

3. a. $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}1-m-0\\1-0\\1-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1-0\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{KC}$ donc $CKEL$ est un parallélogramme.

b. $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}0-m\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = (1-m)\times(-m) + 1\times 0 + 0\times 1$$
$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = m(m-1)$$

c. $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0$
$\Leftrightarrow m(m-1) = 0$
$\Leftrightarrow m = 0 \ ou \ (m-1) = 0$
$\Leftrightarrow m = 0 \ \ m = 1$

Pour $m = 0$ ou $m = 1$ les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux donc (KC) est perpendiculaire à (KE). Or, $CKEL$ est un parallélogramme. Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
Donc $CKEL$ est un rectangle quand $m = 0$ ou $m = 1$.

4. a. Montrons que, pour $m = \frac{1}{2}$, le parallélogramme $CKEL$ a deux côtés consécutifs de même longueur.

Pour $m = \frac{1}{2}$:

$\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-1\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}$ donc $CK = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $KE = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$CK = KE$. $CKEL$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur donc $CKEL$ est un losange quand $m = \frac{1}{2}$.

b.

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = m(m-1)$$
$$KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\cos(\widehat{CKE}) = \frac{-\frac{1}{4}}{KC \times KE}$$

$$\cos(\widehat{CKE}) = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos(\widehat{CKE}) = -\frac{1}{5}$$

$$\widehat{CKE} = 102°$$