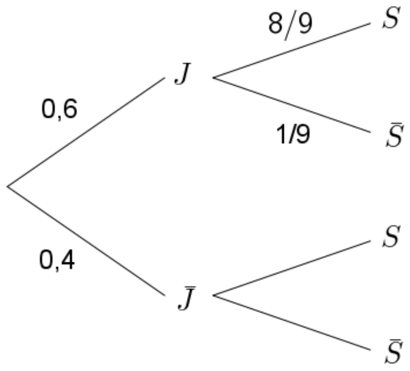
Mathématiques : Polynésie Jour 2 (20 juin 2024)

> Exercice 1

1. Construisons l'arbre pondéré modélisant la situation :



Calculons $P(J \cap S)$

$$P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S)$$
$$P(J \cap S) = \frac{6}{10} \times \frac{8}{9}$$
$$P(J \cap S) = \frac{8}{15}$$

La probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.

2. a. On donne $P(S) = \frac{2}{3}$.

J et $\bar{J}$ forment une partition de l'univers et S est un événement de ce même univers. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S)$$
$$P(\bar{J} \cap S) = P(S) - P(J \cap S)$$
$$P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15}$$
$$P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{15}$$

La probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{2}{15}$.

2. b. Calculons $P_{\bar{J}}(S)$:

$$P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})}$$

$$P_{\bar{J}}(S) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{10}}$$

$$P_{\bar{J}}(S) = \frac{1}{3}.$$

3. a. On répète 30 fois une expérience à deux issues de manière identique et indépendante. Le succès « la personne déclare pratiquer une activité sportive régulière » a une probabilité de $\frac{2}{3}$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{2}{3}$.

3. b. On calcule $P(X = 16)$:

$$P(X = 16) = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$P(X = 16) = 0{,}046$$

La probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière est de 0,046.

3. c. Calculons le nombre de places possibles avec le budget donné.

$$\frac{10\,000}{380} \approx 26{,}3$$

La fédération peut offrir 26 places au maximum.

Le budget est insuffisant si $X \geq 27$.
Sur Numworks :
$P(X \geq 27) = 0{,}003$

Sur Casio et TI :
$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26)$
$P(X \geq 27) = 1 - 0{,}997$
$P(X \geq 27) = 0{,}003$

La probabilité que le budget soit insuffisant est de 0,003.

> **Exercice 2**

1. Réponse B

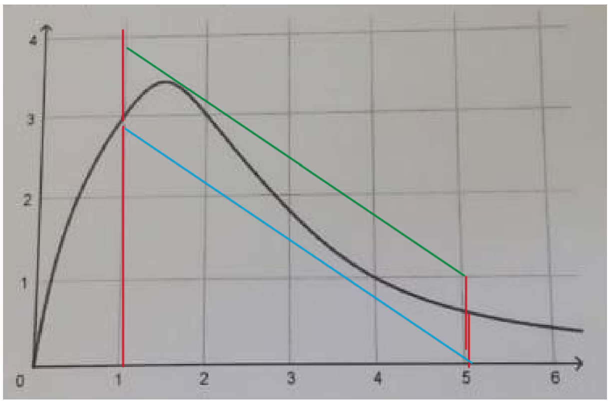
La solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ est $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Ici, $f(x) = Ce^{-3x} + \frac{7}{3}$. De plus $f(0) = 1$.

$$C + \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

La solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$

2. Réponse C



L'aire sous C_f calculée par défaut entre 1 et 5 est celle du triangle rectangle d'hypoténuse bleu : $\frac{4\times 3}{2} = 6$ u.a.

L'aire par excès du trapèze (en vert) est $(4+1) \times \frac{4}{2} = 10$ u.a.

Donc $5 \leq I \leq 10$

3. Réponse B

$$\int_0^2 g'(x)dx = [g(x)]_0^2 = 4\ln 8 - 0 \approx 8{,}3$$

4. Réponse D

Former un groupe de 5 élèves c'est choisir 5 élèves parmi 31 sans tenir compte de l'ordre.

Réponse A : 31^5 est un k-uplet. Cela voudrait dire qu'on choisit 5 fois de suite un élève parmi les 31. Le même élève pourrait être sélectionner 2 fois ce qui est impossible.

Réponse B : $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ est un arrangement. Cela voudrait dire qu'on sélectionne les 5 élèves les uns après les autres sans répétition mais que l'on distinguerait le groupe A-B-C-D-E du groupe E-B-A-C-D alors qu'il est composé des mêmes personnes.

Réponse C : $31 + 30 + 29 + 28 + 27 = \binom{31}{1} + \binom{30}{1} + \binom{29}{1} + \binom{28}{1} + \binom{27}{1}$

La professeure forme 5 groupes de 1 élève.

5. Réponse A

La professeure choisit 3 élèves parmi les 20 spécialistes SES puis 2 élèves parmi les 11 restants.

> **Exercice 3**

1.a. Calculons le 2e et le 3e terme :

$$u_1 = u_0 - \ln\left(\frac{u_0}{4}\right) = 8 - \ln\frac{8}{4} = 8 - \ln 2 \approx 7{,}31$$
$$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) = 8 - \ln 2 - \ln\left(\frac{8 - \ln 2}{4}\right) \approx 6{,}70$$

1. b. L'algorithme additionne les termes. `mystere(10)` donne la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

1. c. On modifie la dernière ligne du programme Python en divisant la somme S par le nombre de termes k : `return S/k`

2. La fonction $f(x) = x - \ln(x) + 4$ est définie et dérivable sur]0 ; +∞[comme somme de fonctions de référence définies et dérivables sur]0 ; +∞[

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{x-1}{x}$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.
$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$1 + 2\ln 2$	↗	

$$f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln 4 = 1 + 2\ln 2$$

3. a. Soit la propriété $P(n)$: $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$
<u>Initialisation :</u>
$u_0 = 8$ et $u_1 \approx 7{,}31$
On a $1 \leq u_1 \leq u_0$
$P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u>
Supposons $P(k)$ vraie pour un entier naturel k c'est-à-dire $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$.
Montrons que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence :

$$1 \leq u_{k+1} \leq u_k$$

La fonction f est croissante sur [1 ; +∞[

$$f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$$

$$1 \leq 1 + 2\ln 2 \ \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

$$1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :
La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n.

3. b. D'après le résultat précédent :
$u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
$1 \leq u_n$ donc la suite est minorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 1$.

3. c. Résolvons l'équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x$$
$$f(x) = x \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{4} = 1$$
$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 4$$

L'équation $f(x) = x$ a pour solution $x = 4$.

3. d. D'après le théorème du point fixe :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$$

Par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$
D'après la question précédente, $\ell = 4$.

La limite de la suite (u_n) est $\ell = 4$.

> **Exercice 4**

1. Vérifions la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4+1 \\ -2+1 \\ 4-17 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1+1 \\ -3+1 \\ 7-17 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\frac{5}{2} \neq \frac{-1}{-2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 5 - 3 \times (-1) + 1 \times (-13) = 10 + 3 - 13 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 - 3 \times (-2) + 1 \times (-10) = 4 + 6 - 10 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

2. b. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{pmatrix}$ est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$2x - 3y + z + d = 0$$

Le point $A(-1; -1; 17)$ appartient au plan $\mathcal{P}$. Ses coordonnées vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$.

$$2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 17 + d = 0$$
$$-2 + 3 + 17 + d = 0$$
$$18 + d = 0$$
$$d = -18$$

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x - 3y + z + 18 = 0$.

3. a. D'après l'équation paramétrique de la droite d, un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. b. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \\ 2x-3y+z-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \\ 2(3t+2)-3(t+5)+4t+1-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \\ 7t-28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 9 \\ z = 17 \\ t = 4 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection E avec le plan $\mathcal{P}$ sont $E(14; 9; 17)$.

4. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passe par D.
La droite Δ coupe le plan $\mathcal{P}$ en F donc F est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$.
La distance entre le point D et le plan $\mathcal{P}$ est donc DF.

$$DF = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-5)^2 + (3-1)^2}$$
$$DF = \sqrt{16+36+4}$$
$$DF = \sqrt{56}$$
$$DF = \sqrt{4 \times 14}$$
$$DF = 2\sqrt{14}$$

La distance entre le point de départ D et le plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. La distance la plus courte entre le point D et le plan $\mathcal{P}$ est la distance DF.
Vérifions quelle distance peut parcourir le drone dans le temps imparti compte tenu de sa vitesse :

$$d = v \times \Delta t$$
$$d = 18{,}6 \times 40$$
$$d = 744$$

Le drone peut parcourir 744 m en 40 s.

Le distance DF est de $2\sqrt{14}$ centaines de mètres soit 748 m environ. Cette distance est plus grande que celle que le drone est capable de parcourir en 40s. Le drone n'arrivera pas à temps.