



Mathématiques : Polynésie Jour 1 (19 juin 2024)

> Exercice 1

Affirmation 1 : Faux.

On a :

$$\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 5 - 6 = -1$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OC} \neq 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas orthogonaux donc $\vec{n}$ n'est pas normal au plan (OAC).

Affirmation 2 : Vrai.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 0-1 \\ -3+1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ donc les points A, B et C sont alignés et C appartient à (AB).

Vérifions si C appartient à $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} 5 = -t + 3 \\ 0 = t + 2 \\ -3 = 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Il existe un unique réel t solution du système donc le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.

C appartient à (AB) donc $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes en C.

Affirmation 3 : Vrai.

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'après son équation paramétrique.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'après son équation cartésienne.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 \times 1 + 1 \times 5 + 2 \times (-2) = -1 + 5 - 4 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 : Vrai.

Le plan médiateur du segment [BC] a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$;

Les coordonnées du milieu M de [BC] sont $M(2 ; 1 ; -1)$.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ est

$$6x - 2y - 4z + d = 0$$

Le point M vérifie l'équation du plan :



$$6 \times 2 - 2 \times 1 - 4 \times (-1) + d = 0$$
$$d = -14$$

On a $6x - 2y - 4z - 14 = 0$. En divisant par 2, une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ est

$$3x - y - 2z - 7 = 0$$

> Exercice 2

Partie A

1. On a $(E) : y' = -0,02y + m$

Les solutions générales sont les fonctions de la forme $k \times e^{at} - \frac{b}{a}$ avec $a = -0,02$ et $b = m$
ainsi les solutions sont les fonctions de la forme $k \times e^{-0,02t} + \frac{m}{0,02} = k \times e^{-0,02t} + 50m$

2. Déterminons la valeur de k .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,02t = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \text{ Par composition } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,02t} = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k = k \text{ donc par produit } \lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-0,02t} = 0.$$
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 50m = 50m \text{ donc par somme } \lim_{t \rightarrow +\infty} k e^{-0,02t} + 50m = 50m.$$

$$\text{On a } 50m = 30 \Leftrightarrow m = \frac{30}{50} \Leftrightarrow m = 0,6.$$

3. On sait que $f(0) = 210$

$$\Leftrightarrow k e^{-0,02 \times 0} + 50 \times 0,6 = 210$$

$$\Leftrightarrow k + 30 = 210$$

$$\Leftrightarrow k = 180$$

$$\text{ainsi } f(t) = 180e^{-0,02t} + 30$$

Partie B

1.a. Graphiquement, il semble que $f(t) \leq 50$ pour $T \geq 110$ s.

Il faut attendre au minimum 110 s avant de démolier l'objet.

1.b. On résout :

$$f(t) \leq 50$$
$$\Leftrightarrow 180e^{-0,02t} + 30 \leq 50$$
$$\Leftrightarrow 180e^{-0,02t} \leq 20$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,02t} \leq \frac{20}{180}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,02t} \leq \frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow \ln e^{-0,02t} \leq \ln \frac{1}{9} \text{ par croissance de la fonction } \ln$$

sur $]0; +\infty[$



$$\Leftrightarrow -0,02t \leq -\ln 9$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 9}{0,02}$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{1}{0,02} \times \ln 3^2$$

$$T = 100 \ln 3$$

2. On calcule $\frac{1}{100-0} \int_0^{100} f(t) dt$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \int_0^{100} (180e^{-0,02t} + 30) dt &= \frac{1}{100} \times \left[\frac{180}{-0,02} e^{-0,02t} + 30t \right]_0^{100} \\ \frac{1}{100} \int_0^{100} (180e^{-0,02t} + 30) dt &= \frac{1}{100} \times (-9000 e^{-2} + 30 \times 100 - (-9000)) \\ \frac{1}{100} \int_0^{100} (180e^{-0,02t} + 30) dt &= -90e^{-2} + 120 \end{aligned}$$

La valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes est de $120 - 90e^{-2}$ °C soit environ 108°C.

> Exercice 3

Partie A

1. On répète trois fois une expérience à deux issues de manière identique et indépendante. Le succès « la pièce est retombée du côté face » a une probabilité de 0,5. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,5$.

2.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Partie B

1.

$$P_{A_1}(G) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(A_1)}$$

$$P_{A_1}(G) = \frac{P(G)}{P(A_1)}$$

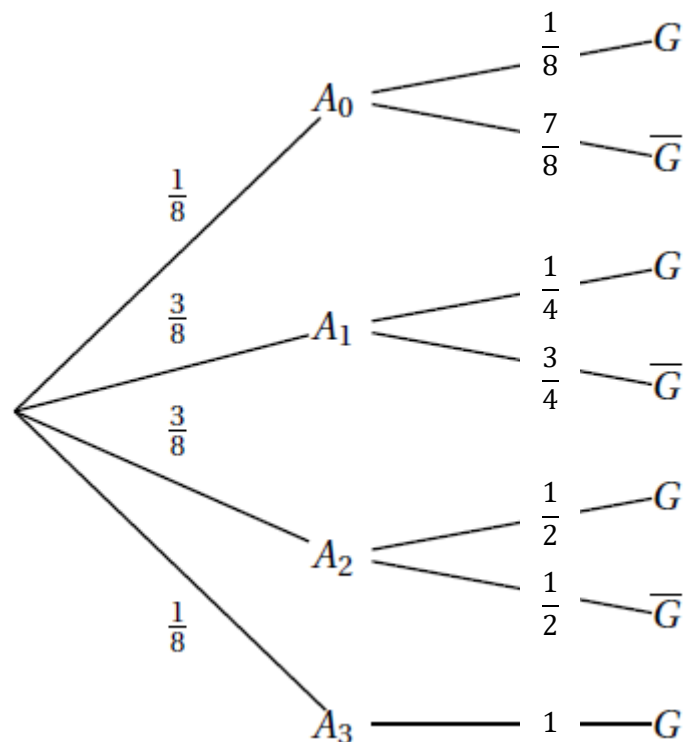
$$P_{A_1}(G) = \frac{P(X = 3)}{P(A_1)}$$

$$P_{A_1}(G) = \frac{0,125}{0,5}$$

$$P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$$



2.



3. Les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers et G est un événement de ce même univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A_0 \cap G) + P(A_1 \cap G) + P(A_2 \cap G) + P(A_3 \cap G) \\
 P(G) &= P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G) \\
 P(G) &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 \\
 P(G) &= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \\
 p = P(G) &= \frac{27}{64}
 \end{aligned}$$

La probabilité de gagner à ce jeu est de $\frac{27}{64}$.

4. On cherche $P_G(A_1)$:

$$\begin{aligned}
 P_G(A_1) &= \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} \\
 P_G(A_1) &= \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} \\
 P_G(A_1) &= \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

La probabilité qu'exactly une pièce soit tombée du côté face à la première tentative sachant que la partie a été gagnée est de $\frac{2}{9}$.

5. On répète n fois une expérience de manière identique et indépendante dont le succès « La partie est gagnée » a une probabilité de $\frac{27}{64}$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$.

On cherche $P(X \geq 1) \geq 0,95$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,95 \\
 &\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,05 \\
 &\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n \leq 0,05 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{37}{64}\right)^n \leq 0,05 \\
 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{37}{64}\right)^n \leq \ln 0,05 \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\
 &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{37}{64}\right) \leq \ln 0,05 \\
 &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \\
 &\Leftrightarrow n \geq 6
 \end{aligned}$$

Pour que la probabilité de gagner à ce jeu dépasse 0,95, il faut jouer au moins 6 fois.

> Exercice 4

Partie A

1.

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range (n) :
        u = 4 / (5-u)
    return u
```

2.

La commande suite(2) permet l'exécution de 2 boucles « for » donc le calcul de 2 termes de la suite.

$u = 3$

Pour $i = 0$, $u = \frac{4}{5-3} = 2$

pour $i = 1$, $u = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} = 1,3333333333333333$

3. On observe que la suite semble tendre vers 1 alors que la valeur du premier terme est de 3. La suite semble décroissante et convergente. Sa limite semble être égale à 1.

Partie B

1. La fonction f est définie et dérivable sur $] -\infty; 5[$ comme fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{4}{(5-x)^2}$$

Pour tout $x \in] -\infty; 5[$, $(5-x)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. Soit la propriété $P(n) : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

Initialisation :

$u_0 = 3$ et $u_1 = 2$ (d'après partie A question 2)

Donc :

$$1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k , $1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 4$.

Montrons que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4$.

Par hypothèse de récurrence :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{4}{5-x}$ strictement croissante sur $[1; 4]$:

$$\begin{aligned} f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(4) \\ 1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4 \end{aligned}$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .

3.a. Sur $] -\infty; 5[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x \\ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{4}{5-x} - x = 0 \\ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{4 - x(5-x)}{5-x} = 0 \\ f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4}{5-x} = 0 \end{aligned}$$

Sur $] -\infty; 5[$, $5-x \neq 0$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

3.b. D'après la question précédente on résout dans l'intervalle $] -\infty; 5[$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) = 0 \text{ ou } (x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x &= 4 \end{aligned}$$

$$S = \{1; 4\}$$

4. D'après la question 2 :

$u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

$1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et minorée converge donc (u_n) converge.

D'après le théorème du point fixe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

et par unicité de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

donc la limite l de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question 3. Cette équation a deux solutions $x = 1$ ou $x = 4$.

Or la suite est majorée par son premier terme $u_0 = 3$.

On en déduit que la limite de la suite est $l = 1$.

5. En choisissant $u_0 = 4$, on aurait $u_1 = f(u_0) = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n) = 4$. La suite serait constante. Son comportement serait donc différent.