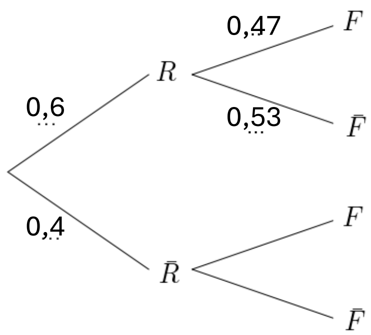
**Mathématiques : Métropole Jour 2 sujet 1 fuité (20 juin 2024)**

## > Exercice 1

**Partie A**

**1.a.** Complétons l'arbre pondéré modélisant la situation :




**1.b.** Déterminons $P(R \cap F)$ :

$$P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F)$$
$$P(R \cap F) = 0{,}6 \times 0{,}47$$
$$P(R \cap F) = 0{,}282$$

La probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité est de 0,282.

**1.c.** Déterminons $P_{\bar{R}}(F)$ :

$R$ et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers et $F$ est un événement de ce même univers. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\bar{R} \cap F)$$

$$P(F) = P(R) \times P_R(F) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(F)$$
$$0{,}38 = 0{,}6 \times 0{,}47 + 0{,}5 \times P_{\bar{R}}(F)$$
$$0{,}38 = 0{,}282 + 0{,}5 \times P_{\bar{R}}(F)$$
$$0{,}5 \times P_{\bar{R}}(F) = 0{,}098$$
$$P_{\bar{R}}(F) = 0{,}196$$

La probabilité que le client ait acheté carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier est de 0,196.

**1.d.** Déterminons $P_F(R)$ :

$$P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$
$$P_F(R) = \frac{0{,}282}{0{,}38}$$

$$P_F(R) = 0{,}74$$

La probabilité qu'un client soit un client régulier sachant qu'il a acheté une carte de fidélité est de 0,74. L'affirmation du directeur du service des ventes est fausse.

**2.a.** On répète 20 fois une expérience à deux issues de manière identique et indépendante. Le succès « le client a acheté une carte de fidélité » a une probabilité de 0,38. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de clients ayant acheté une carte de fidélité suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}38$.

**2.b.** On calcule $P(X \geq 5)$ :
Sur TI et Casio :

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$
$$P(X \geq 5) = 1 - 0{,}073$$
$$P(X \geq 5) = 0{,}927$$

Sur Numworks, on obtient directement $P(X \geq 5) = 0{,}927$.

La probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20 est de 0,927.

**Partie B**
**1.** La variable aléatoire $X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}47$.
Son espérance est $E(X_2) = n \times p$

$$E(X_2) = 1000 \times 0{,}47$$
$$E(X_2) = 470$$

En moyenne, sur 1000 clients réguliers, 470 clients réguliers ont acheté une carte de fidélité.

**2.** La variable aléatoire $Z$ modélise le montant moyen offerts aux 1000 clients (bon d'achat et prime de fidélité).

$E(Z) = E\left(\frac{Y}{1000}\right) = \frac{E(Y)}{1000}$ par linéarité de l'espérance.

$$E(Z) = \frac{E(Y_1 + Y_2)}{1000} = \frac{E(Y_1) + E(Y_2)}{10000} = \frac{E(Y_1) + E(50X_2)}{10000} = \frac{E(Y_1) + 50E(X_2)}{10000}$$

$$E(Z) = \frac{30\,000 + 50 \times 470}{1000} = 53{,}5$$

$$V(Z) = V\left(\frac{Y}{1000}\right) = \frac{V(Y)}{1000^2}$$

$Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes.

$$V(Z) = \frac{\left(V(Y_1) + V(Y_2)\right)}{1000^2}$$

$$V(Z)=\frac{V(Y_1)+V(50X_2)}{1000^2}$$

$$V(Z)=\frac{V(Y_1)+50^2V(X_2)}{1000^2}$$

$$V(Z)=\frac{100\,000+50^2\times\big(1000\times 0{,}47\times(1-0{,}47)\big)}{1000^2}$$

$$V(Z)=0{,}72275$$

**3.** Déterminons $P(\,Z\in]51{,}7;55{,}3[\,)$ :

$$P(\,Z\in]51{,}7;55{,}3[\,)=P(\,|Z-53{,}5|<1{,}8)$$

$$P(\,|Z-53{,}5|<1{,}8)=1-P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)\leq\frac{V(Z)}{1{,}8^2}$$
$$P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)\leq\frac{0{,}72275}{1{,}8^2}$$
$$P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)\leq 0{,}223$$

$$-P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)\geq -0{,}223$$
$$1-P(\,|Z-53{,}5|\geq 1{,}8)\geq 1-0{,}223$$

$$P(\,|Z-53{,}5|<1{,}8)\geq 0{,}777$$

La probabilité que $Z$ soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

> **Exercice 2**

**Affirmation 1 : Vraie**

Déterminons deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-0\\1-4\\5+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-0\\-2-4\\-1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 6\times 2 - 3\times 2 + 6\times(-1) = 12 - 6 - 6 = 0$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 6\times 2 - 6\times 2 + 0\times(-1) = 12 - 12 = 0$$

$\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(ABC)$ donc $\vec{n}$ est est un vecteur normal au plan $(ABC)$.

**Affirmation 2 : Vraie**

Testons les coordonnées des points A et B dans l'équation paramétrique de la droite :

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2+2t \\ 4 = 3-t \\ -1 = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Il existe un unique paramètre $t$ solution du système $S_1$ donc le point $A$ appartient à la droite.

$$S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2+2t \\ 1 = 3-t \\ 5 = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Il existe un unique paramètre $t$ solution du système $S_2$ donc le point $B$ appartient à la droite.

Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

**Affirmation 3 : Vraie**

D'après l'équation cartésienne donnée, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 6 + 2 \times (-3) - 1 \times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
La droite $(AB)$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Vérifions que le point C appartient au plan $\mathcal{P}$ :

$$2 \times 6 + 2 \times (-2) - (-1) - 9 = 12 - 4 + 1 - 9 = 0$$

Les coordonnées du point C vérifient l'équation cartésienne du plan donc le point C appartient au plan.

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $C$ et orthogonal à la droite $(AB)$ est $2x + 2y - z - 9 = 0$

**Affirmation 4 : Fausse**

Résolvons le système $S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = 3 + t \\ 4 - t' = 1 + t \\ -1 + 2t' = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' = 3 + t \\ t' = 3 - t \\ -1 + 2t' = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3 - t) = 3 + t \\ t' = 3 - t \\ -1 + 2(3 - t) = 2 + t \end{cases}$

$$\begin{cases} 6 - 2t = 3 + t \\ t' = 3 - t \\ 5 - 2t = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 3 \\ t' = 3 - t \\ 3t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Il existe un unique couple de paramètres solution du système$S_3$ : $(t = 1\,;\ t' = 2)$donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

> **Exercice 3**

**Partie A :**

**1.a.** Calculons $u_{n+1} - 2$ :

$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n + 2 - 2$$
$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n$$
$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

**1.b.** Calculons $u_{n+1} - u_n$ :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$$

et d'autre part $(u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$

donc $$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

**2.a.** Soit $P(n)$ la proposition $u_n < 2$.
Initialisation : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$ donc $u_0 < 2$.
$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $P(k)$ vraie pour un entier naturel $k$ c'est-à-dire $u_k < 2$.
Montrons que $u_{k+1} < 2$.

Par hypothèse de récurrence : $$u_k < 2$$
$$\Leftrightarrow u_k - 2 < 0$$
et $$u_k > 1$$
donc $$u_k\,(u_k - 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow u_{k+1} - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow u_{k+1} < 2$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $u_n < 2$ pour tout entier naturel $n$.

**2.b.** Etudions le sens de variation de la suite $(u_n)$ :

On sait que $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$

On sait que $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$
Ainsi $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$
$u_{n+1} - u_n < 0$

La suite $(u_n)$ est décroissante.

De plus $u_n > 1$ donc la suite $(u_n)$ est minorée.

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite décroissante et minorée converge donc la suite $(u_n)$ converge.

Déterminons sa limite avec le théorème du point fixe :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ car la suite est convergente.

On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$ et par unicité de la limite $f(\ell) = \ell$

Résolvons $f(\ell) = \ell$
$\Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 2 = \ell$
$\Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = 0 \; ou \; \ell - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 1 \; ou \; \ell = 2$

Or $u_n > 1 \; et \; u_n < u_0 = a < 2$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

**Partie B**
**1.**
u(2,1) renvoie la valeur de $u_1$ pour $u_0 = 2$
Le programme renvoie 2.
u(2,2) renvoie la valeur de $u_2$ pour $u_0 = 2$
Le programme renvoie 2.

**2.** Il semble que la suite $(u_n)$ soit constante quand $u_0 = 2$.
$u_n = 2 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

**Partie C**

**1.a.** Déterminons la nature de la suite $(v_n)$ :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$$
$$v_{n+1} = \ln(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1)$$
$$v_{n+1} = \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$$
$$v_{n+1} = \ln(u_n - 1)^2$$
$$v_{n+1} = 2 \times \ln(u_n - 1)$$
$$v_{n+1} = 2 \times v_n$$

La suite $(v_n)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(a - 1)$.

**1.b.** Exprimons la suite $v_n$ en fonction de $n$ :

$$v_n = v_0 \times q^n$$
$$v_n = \ln(a - 1) \times 2^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Et $v_n = \ln(u_n - 1) \Leftrightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} + 1$
Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = e^{2^n \times \ln(a-1)} + 1$.

- Pour $1 < a < 2$, $\ln(a - 1) < 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \times \ln(a - 1) = -\infty$ par produit.

$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$
Enfin, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} + 1 = 1$

- Pour $a = 2$, $\ln(a - 1) = 0$ et $e^{2^n \times \ln(a-1)} = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} + 1 = 2$$

- Pour $a > 2$, $\ln(a - 1) > 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \times \ln(a - 1) = +\infty$ par produit.
$\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = +\infty$
Enfin, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} + 1 = +\infty$

Exercice 4

Partie A
**1.a.** $f(0) = 2$
**1.b.** Déterminons la pente de la tangente $T$ :
$f'(0) = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N}$
$f'(0) = \frac{0-2}{2-1}$
$f'(0) = -1$

**2.** On résout $f(x) = 0$
$C_f$ coupe une fois l'axe des abscisses en $x = -2$.
L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = -2$.

**3.** La tangente $T$ traverse la courbe au point $N(0; 2)$. $T$ est située au-dessus de $C_f$ pour $x \leq 0$ donc $f$ est concave sur ]-∞ ; 0]. $T$ est située au-dessous de $C_f$ pour $x \geq 0$ donc $f$ est convexe sur [0 ;+∞[.

**4.** La fonction $f$ est négative sur ]-∞ ;-2 ] et positive sur ]-2 ; +∞[ donc une primitive $F$ de $f$ est décroissante sur ]-∞ ;-2 ] et croissante sur ]-2 ; +∞[. La courbe 2 représente une telle fonction.

**Partie B**
**1.** Déterminons $b$ :
$$f(0) = 2$$
$$\Leftrightarrow (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = 2$$
$$\Leftrightarrow b = 2$$

**2.** On sait que $f(-2) = 0$
$$f(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2a + b)e^{\lambda x} = 0$$
$$f(-2) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$$

**3.** D'après le résultat précédent, on en déduit la valeur de $a$ :
$$-2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

La fonction $f(x) = (x + 2)e^{\lambda x}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$$f'(x) = e^{\lambda x} + \lambda(x + 2)e^{\lambda x}$$
$$f'(x) = (\lambda x + 1 + 2\lambda)e^{\lambda x}$$
$$f'(x) = (\lambda x + 1 + 2\lambda)e^{\lambda x}$$

D'après l'étude graphique, $f'(0) = -1$

$$\begin{gathered} f'(0) = -1 \\ \Leftrightarrow (\lambda a \times 0 + 1 + 2\lambda)e^{\lambda \times 0} = -1 \\ \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = -1 \\ \\ \Leftrightarrow \lambda = -1 \end{gathered}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

**Partie C**

**1.** Détermination de la limite de $f$ en $-\infty$ :

$$f(x) = (x+2)e^{-x} =$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$

**2.** Étudions le signe de $f'(x)$ et les variations de $f$ :

$$f'(x) = (-x-1)e^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

$$-x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-e$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(-1) = (-1+2)e^{1} = -e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$. Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

**3.a.** Étude de la convexité de $f$ :

$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-1) \times (-x-1)e^{-x}$
$f''(x) = xe^{-x}$

Pour tout réel $x$, $e^{-x} > 0$
Donc $f''(x)$ est négative sur ]-∞ ;0] et positive sur [0 ;+∞[.
La fonction est concave sur ]-∞ ;0] et convexe sur [0 ;+∞[.

**3.b.** La dérivée seconde $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$. La courbe $C_f$ admet un point d'inflexion au pont d'abscisse 0 c'est-à-dire au point $N(0; 2)$.

**4.a.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par
$u(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = x + 2$
$u'(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = 1$

Par intégration par parties on a :

$$\int_{-2}^{t} (x+2)e^{-x}\,dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -e^{-x}\,dx$$

$$I(t) = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{t} - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{t}$$

$$I(t) = -(t+2)e^{-t} + 0 - e^{-t} + e^{2}$$

$$I(t) = -(t+3)e^{-t} + e^{2}$$

**4.b.** La fonction $f$ est continue et positive sur [-2 ; +∞[ d'après les parties A et B.
Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$ est l'aire du domaine du plan situé entre $C_f$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

Déterminons cette limite :
$\lim\limits_{t \to +\infty} -te^{-t} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-t} = 0$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = e^{2}$ par somme.