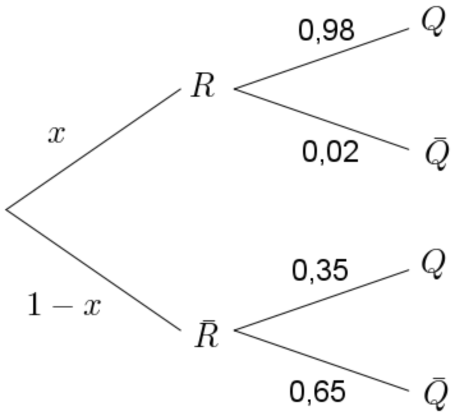
Mathématiques : Métropole Jour 2 (20 juin 2024)

> Exercice 1

1. D'après l'énoncé $P(Q) = 0{,}917$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$

2. a. Complétons l'arbre pondéré :



2.b. Déterminons x:
R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Q) = P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q)$$
$$P(Q) = P(R) \times P_R(Q) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(Q)$$
$$0{,}917 = x \times 0{,}98 + (1 - x) \times 0{,}35$$
$$0{,}917 = 0{,}98x - 0{,}35x + 0{,}35$$
$$0{,}567 = 0{,}63x$$
$$x = \frac{0{,}567}{0{,}63}$$
$$x = 0{,}9$$

3. On calcule $P_Q(R)$

$$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)}$$

$$P_Q(R) = \frac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)}$$

$$P_Q(R) = \frac{0{,}9 \times 0{,}98}{0{,}917}$$

$$P_Q(R) = 0{,}962$$

L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. La probabilité qu'il ait réussi l'examen est de 0,962.

4. On cherche à résoudre $P(N \geq k) = 0{,}65$

$$P(N \geq 12) = 0{,}649$$
$$P(N \geq 11) = 0{,}797$$

À la calculatrice, par essais successifs, on obtient $k = 11$.

La directrice doit attribuer une récompense aux étudiant ayant eu au moins 11.

5. Pour une somme de variables aléatoires indépendantes, on a :

$$E(S) = 10 \times E(N)$$
$$E(S) = 10 \times 20 \times 0{,}615$$
$$E(S) = 123$$

$$V(S) = 10 \times V(N)$$
$$V(S) = 10 \times 20 \times 0{,}615 \times (1 - 0{,}615)$$
$$V(S) = 47{,}355$$

6.a. La variable aléatoire M modélise la note moyenne obtenue par les dix étudiants à l'examen.

6.b. $\boldsymbol{E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{E(S)}{10}}$ **par linéarité de l'espérance**

$$E(M) = \frac{123}{10} = 1{,}23$$

$$V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{V(S)}{10^2}$$
$$V(M) = \frac{47{,}355}{100} = 0{,}47355$$

6.c. Déterminons $P(|M - 12{,}3| \leq 2)$:

$$P(|M - 12{,}3| < 2) = 1 - P(|M - 12{,}3| \geq 2)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$$
$$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq \frac{0{,}47355}{4}$$
$$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq 0{,}118$$
$$-P(|M - 12{,}3| \geq 2) \geq -0{,}118$$
$$1 - P(|M - 12{,}3| \geq 2) \geq 1 - 0{,}118$$
$$1 - P(|M - 12{,}3| \geq 2) \geq 0{,}882$$

$$P(|M - 12{,}3| < 2) \geq 0{,}882$$

La probabilité pour que la note moyenne des 10 étudiants soit dans l'intervalle [10,3 ; 14,3] est supérieure à 0,882 donc supérieure à 0,8.

> **Exercice 2**

Partie A

1. Calculons le taux de chlore associé à l'ajout de 15g dans la piscine

$$\frac{15\ g}{50\ m^3} = \frac{15\ 000\ mg}{50\ 000\ L} = 0{,}3\ mg.L^{-1}$$

2. a. Soit $P(n)$ la propriété $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
Initialisation : On a $v_0 = 0{,}7$

$$v_1 = 0{,}92 \times v_0 + 0{,}3$$
$$v_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3$$
$$v_1 = 0{,}944$$

Ainsi $v_0 \leq v_1 \leq 4$
$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $P(k)$ vraie pour un entier naturel k c'est-à-dire $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$.
Montrons que $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$.

$$v_k \leq v_{k+1} \leq 4$$
$$0{,}92v_k \leq 0{,}92v_{k+1} \leq 3{,}68$$
$$0{,}92v_k + 0{,}3 \leq 0{,}92v_{k+1} + 0{,}3 \leq 3{,}98$$
$$v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 3{,}98$$
$$v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ pour tout entier naturel n.

2.b. D'après le résultat précédent :
$v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante.
$v_n \leq 4$ donc la suite (v_n) est majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est croissante et majorée donc (v_n) converge.

La suite (v_n) converge vers une limite ℓ ;
Soit la fonction $f(x) = 0{,}92x + 0{,}3$ définie sur [0 ;+∞[. On a $v_{n+1} = f(v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = f(\ell)$.
Par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$.
Résolvons cette équation :

$$0{,}92\ell + 0{,}3 = \ell$$
$$\Leftrightarrow 0{,}08\ell = 0{,}3$$
$$\Leftrightarrow \ell = 3{,}75$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3{,}75$.

3. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}. À long terme le taux de chlore selon ce modèle tendra vers 3,75 mg.L^{-1}. Il ne sera pas conforme.

4.

```
def alerte_chlore(s) :
        n=0
        v=0.7
        while v <= s :
                n = n+1
                v= 0.92*v+0.3
        return n
```

5. À la calculatrice on a $v_{16} \approx 2{,}95$ et $v_{17} \approx 3{,}01$
Le programme Python retourne la valeur 17.

Partie B

1. L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay + b$. La solution générale de ces équations différentielles est de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Ici $a = -0{,}08$ et $b = \frac{q}{50}$

La solution générale est $f(x) = Ce^{-0{,}08x} - \left(\frac{\frac{q}{50}}{-0{,}08}\right)$ soit $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$

2.a. Exprimons la limite de f en $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} -0{,}08x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$. Par composition $\lim_{x\to+\infty} e^{-0{,}08x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} C = C$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} Ce^{-0{,}08x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{q}{4} = \frac{q}{4}$ donc par somme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}$.

2.b. On a $f(0) = 0{,}7$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{q}{4} = 2 \Leftrightarrow q = 8$$

$$f(0) = 0{,}7 \Leftrightarrow Ce^0 + 8 = 0{,}7 \Leftrightarrow C + 8 = 0{,}7 \Leftrightarrow C = -7{,}3$$

On a alors $f(x) = -7{,}3e^{-0{,}08x} + 8$

Exercice 3

Partie A

1. Le repère n'est pas orthonormé.
$f(-1)$ est l'ordonnée du point B.

$$f(-1) = -2$$

$f'(-1)$ est le coefficient de la tangente (AB) en B.

$$f'(-1) = 1$$

2. La courbe C_f est située au-dessus de ses cordes sur]-2 ; -1] et en dessous sur [-1 ; +∞[donc la courbe C_f n 'est pas convexe sur son ensemble de définition.

3. Il semble que l'équation $f(x) = 0$ admette une unique solution sur]-2 ; +∞[.
Il semble que $f(x) = 0$ pour $x = 0{,}1$.

Partie B

1. Calcul de la limite en -2 :

$\lim\limits_{x \to -2} x^2 + 2x - 1 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x + 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \ln(x+2) = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$

La courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote verticale.

2. La fonction f est définie et dérivable sur }-2 ;+∞[comme la somme entre un polynôme du second degré et une composée de fonction logarithme et affine toutes trois définies et dérivables sur]-2 ;+∞[.

Pour tout $x > -2$:

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+2) + 1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$$

3. Étude des variations de f :

$\forall\, x > -2,\ x+2>0$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme $2x^2+6x+5$

$$\Delta = 6^2 - 4\times 2\times 5 = -4$$

$\Delta < 0$ donc $2x^2+6x+5>0 \quad \forall\, x > -2$.
Ainsi $f'(x)>0$ et f est strictement croissante sur]-2 ; +∞[.

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur]-2 ;+∞[.
$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
$0 \in]-\infty; +\infty[$
D'après la corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur]-2 ; +∞[.

À la calculatrice, par balayage successif, on a $f(0{,}117)\approx -0{,}0023$ et $f(0{,}118)\approx 0{,}0004$

$$\alpha = 0{,}12$$

5. La fonction f est strictement croissante sur]-2 ; +∞[et s'annule en α. Le signe de $f(x)$ est :

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

6. Etude de la convexité de f :
Sur]-2 ; +∞[, on a $f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - 1\times(2x^2+6x+5)}{(x+2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Sur]-2 ; +∞[, $(x+2)^2>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $2x^2+8x+7$

$$\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 7 = 8$$

Le polynôme $2x^2 + 8x + 7$ admet 2 racines :

$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{4} = \frac{-4-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{4} = \frac{-4+\sqrt{2}}{2}$

x_1 n'appartient pas à l'intervalle d'étude.

x	-2	$\frac{-4+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

Sur]-2 ; +∞[, f'' s'annule en changeant de signe une fois donc C_f admet un unique point d'inflexion en $x = \frac{-4+\sqrt{2}}{2}$.

Partie C

1. Déterminons $h(x)$ pour tout $x > -2$:

$$h(x) = JM^2$$
$$h(x) = \sqrt{\left(x_M - x_J\right)^2 + \left(y_M - y_J\right)^2}^{\,2}$$
$$h(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln(x+2) - 1)^2}^{\,2}$$
$$h(x) = x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2$$

2.a. Pour tout $x > -2$, $x + 2 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ déterminé à la partie B question 5.

x	-2	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$

2.b. La fonction h admet un minimum en $x = \alpha$ d'après son tableau de variations. La distance JM est minimale quand JM^2 est minimale c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

3.a. La fonction f s'annule en α

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$$
$$f(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha + 2) = 1 - \alpha^2 - 2\alpha$$

3.b. Déterminons le coefficient directeur de la tangente à C_g en M_α i.e. $g'(\alpha)$:
Pour $x > -2$:

$$g'(x) = \frac{1}{x+2}$$
$$g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$$

Déterminons la pente m de la droite (JM_α):

$$m = \frac{(y_{M_\alpha} - y_J)}{(x_{M_\alpha} - x_J)}$$

$$m = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha - 0}$$

$$m = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha}$$
$$m = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha}$$

$$m = -2 - \alpha$$

Deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1. Vérifions :

$$m \times g'(\alpha) = (-2-\alpha) \times \frac{1}{\alpha+2}$$
$$m \times g'(\alpha) = -(\alpha+2) \times \frac{1}{\alpha+2}$$

$$m \times g'(\alpha) = -1$$

Donc la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

> **Exercice 4**

Affirmation 1 : Vraie

Testons les coordonnées des 3 points dans l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$

Point A :

$8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 16 - 16 = 0$

$$A \in \mathcal{P}$$

Point C :

$8 \times 4 - 5 \times 4 + 4 \times 1 - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 0$

$$C \in \mathcal{P}$$

Point D :

$8 \times 0 - 5 \times 0 + 4 \times 4 - 16 = 16 - 16 = 0$

$$D \in \mathcal{P}$$

Les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : Fausse

$8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = -20 + 12 - 16 = -24$

$$B \notin \mathcal{P}$$

Le point B n'appartient pas au plan (ACD) donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

Déterminons les équations paramétriques des droites (AC) et (BH) :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1-0\\1-4\\2-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ont des coordonnées visiblement non proportionnelles, ils sont non colinéaires. Les droites (AC) (BH) ne sont pas parallèles.

$(AC) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(BH) : \begin{cases} x = -k \\ y = 4 - 3k \\ z = 3 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Déterminons si l'intersection existe :

$$\begin{cases} 2 + 2t = -k \\ 4t = 4 - 3k \\ t = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2(3 - k) = -k \\ 4(3 - k) = 4 - 3k \\ t = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2k = -k \\ 12 - 4k = 4 - 3k \\ t = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ k = 8 \\ t = -5 \end{cases}$$

Il existe un unique couple de paramètres $(t; k) = (-5; 8)$ solution du système donc les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

Affirmation 4 : Vraie

Vérifions l'appartenance du point H au plan (ABC) :

$$-1-1+2\times 2-2=-2+4-2=0$$

H appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC).

Vérifions si $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC) :

$\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1-0\\1-0\\2-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ d'après l'équation cartésienne de (ABC).

On remarque que $\overrightarrow{DH}=-\vec{n}$ donc $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC) ;

$\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC) et (DH) coupe (ABC) en H donc H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).