Mathématiques : Métropole Jour 1 (sujet de secours)

> ### Exercice 1

1. Les coordonnées des 4 points sont :

$C(4;4;0)$; $F(4;0;4)$; $G(4;4;4)$ et $H(0;4;4)$

2. Vérifions que les points I et C vérifient l'équation paramétrique de droite.

Le point I a pour coordonnées $I(2;0;4)$ appartient à (IC).

$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dirige la droite (IC)

Une équation paramétrique de la droite (IC) est donc $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3.a. Le plan P est orthogonal à la droite (IC) donc le vecteur $\overrightarrow{IC}$ est normal au plan P.

Une équation cartésienne de P est de la forme :

$$2x + 4y - 4z + d = 0$$

Le point G appartient au plan donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan P.

$$2 \times 4 + 4 \times 4 - 4 \times 4 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 16 - 16 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -8$$

Une équation cartésienne du plan P est $2x + 4y - 4z - 8 = 0$. Par simplification par 2, une équation cartésienne de P est $x + 2y - 2z - 4 = 0$

3.b. J est le point d'intersection entre P et (IC). Ses coordonnées sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \\ x+2y-2z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \\ 2+2t+2(4t)-2(4-4t)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \\ 18t-10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \\ t = \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \times \frac{5}{9} \\ y = 4 \times \frac{5}{9} \\ z = 4 - 4 \times \frac{5}{9} \\ t = \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{9} \\ y = \frac{20}{9} \\ z = \frac{16}{9} \\ t = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Les coordonnées de J sont $J\left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

J est le point d'intersection entre P et (IC) et (IC) est orthogonale à P. Donc J est le projeté orthogonal de C sur P.

3.c. Testons les coordonnées du point K dans l'équation cartésienne du plan P.

$$0 + 2 \times 2 - 2 \times 0 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Les coordonnées de K vérifient l'équation cartésienne du plan P.

$K(0; 2; 0)$ appartient au plan P.

3.d. Le point B appartient au plan (ABC).

$$x_B + 2y_B - 2z_B - 4 = 4 + 2 \times 0 - 2 \times 0 - 4 = 0$$

Les coordonnées de B vérifient l'équation cartésienne du plan P.

$B(4; 0; 0)$ appartient au plan P.

Le point K appartient au plan P.

La cote du point K est nulle donc le point K appartient également au plan (ABC).

Les deux points $B\ et\ K$ appartiennent aux deux plans P et (ABC) donc la droite (BK) est l'intersection des plans (ABC) et P.

4. Dans la pyramide CBKG, B, K et G appartiennent à P et J est le projeté orthogonal de C sur P. Donc [CJ] est la hauteur de la pyramide issue de C.

$$V_{CBKG} = \frac{\mathcal{A}_{KBC} \times GC}{2}$$

On admet que les arêtes du cube ABCDEFGH mesurent 4 unités de longueur.

K est le milieu de [AD] donc KBC est un triangle isocèle en K.

$$\mathcal{A}_{KBC} = AB \times \frac{BC}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$V_{BCGK} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

4.b. On a également $V_{BCGK} = \frac{\mathcal{A}_{BKG} \times CJ}{2}$

$$\mathcal{A}_{BKG} = \frac{2V_{BCGK}}{CJ}$$

Déterminons CJ :

$$CJ = \sqrt{\left(\frac{28}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{20}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 0\right)^2}$$

$$CJ = \frac{8}{3}$$

Ainsi

$$\mathcal{A}_{BKG} = \frac{2 \times 16}{\frac{8}{3}} = 12.$$

5. On a montré en 3.d que B appartient à P.

On sait que G appartient à P. Donc la droite (BG) est incluse dans P.

6. Soit $I'(m\,;0\,;4)$ un point de [EF] avec $0 \leq m \leq 4$.

Déterminons l'équation cartésienne du plan P'de vecteur normal $\overrightarrow{I'C}$ et passant par G.

$$\overrightarrow{I'C}\begin{pmatrix} 4-m \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$P' : (4-m)x + 4y - 4z + d = 0$$

et $G(4\,;4\,;4)$ appartient à P'

$$(4-m) \times 4 + 4 \times 4 - 4 \times 4 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 4(m-4)$$

Une équation cartésienne de P' est $(4-m)x + 4y - 4z + 4(m-4) = 0$

Vérifions si B appartient à P' :

$$(4-m)4+4\times 0-4\times 0+4(m-4)=16-4m+4m-16=0$$

Quelle que soit l'abscisse m de I', B appartient au plan P'.

Donc (BG) est incluse dans P'.

> **Exercice 2**

Parie A

1. On répète 10 fois une expérience à 2 issues dont le succès : « le client passe moins de 12 minutes à la station-service » a une probabilité de 0,25. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}25$.

2. On calcule $P(X\geq 4)$:

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)$$

$$P(X\geq 4)=1-0{,}776$$

$$P(X\geq 4)=0{,}224$$

La probabilité qu'au moins 4 clients passent moins de 12 minutes à la station-service est de 0,224.

3. Calculons l'espérance de la loi binomiale :

$$E(X)=n\times p$$

$$E(X)=10\times 0{,}25$$

$$E(X)=2{,}5$$

En moyenne, 2,5 clients passent moins de 12 minutes à la station-service.

Partie B

1. Exprimons S

$$S=T_1+T_2+T_3$$

2.a. Calculons l'espérance de S.

$$E(S)=E(T_1+T_2+T_3)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3)$$

$$E(S) = 3 \times 6$$

$$E(S) = 18$$

Le temps d'attente total du troisième client est en moyenne de 18 minutes.

2.b. Les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, on a $V(S) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3)$

$$V(S) = 3 \times 1 = 3$$

3. On cherche $P(S \in]14\,;22[\,)$

$$P(S \in]14\,;22[\,) = P(\,|S - E(S)| < 4)$$

$$P(S \in]14\,;22[\,) = P(\,|S - 18| < 4)$$

$$P(S \in]14\,;22[\,) = 1 - P(\,|S - 18| \geq 4)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$P(\,|S - 18| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2}$$

$$\Leftrightarrow \; P(\,|S - 18| \geq 4) \leq \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(\,|S - 18| \geq 4) \geq 1 - \frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow P(\,|S - 18| < 4) \geq \frac{13}{16}$$

Et $\frac{13}{16} = 0{,}8125.$

La probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station-service est supérieure ou égale à 0,81.

> **Exercice 3**

Partie A

1.a. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

On reconnait l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

1.b. Pour tout réel x on a $x^2+1 > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$

Donc $f'(x)$ est positif ou nul sur $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a pour tout $x > 0$:

$$x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - \ln x^2 - \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - \left[\ln x^2 + \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]$$

$$x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - \ln\left(x^2 \times \frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - \ln(x^2+1)$$

$$x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = f(x)$$

3. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = x\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

  $\lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ par produit.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{2\ln x}{x} = 1$ par produit et somme.

- $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$

Enfin, par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Partie B

1. Soit la propriété $P(n) : u_n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 = 7$ donc $u_0 \geq 0$.

$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel k $u_k \geq 0$.

Montrons que $u_{k+1} \geq 0$.

par hypothèse de récurrence :

$$u_k \geq 0$$

et $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$f(u_k) \geq f(0)$$

avec $f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = 0$

$$u_{k+1} \geq 0$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

2. Étudions le sens de variation de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$$

On sait que

$$u_n \geq 0$$

$$u_n^2 \geq 0$$

$$u_n^2 + 1 \geq 1$$

$$\ln(u_n^2 + 1) \geq \ln 1$$

par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*{}_+$

$$-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite(u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par 0 donc, d'après le théorème convergence monotone, la suite (u_n) converge.

4. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ par unicité de la limite

Ainsi $f(l) = l$

$\Leftrightarrow l - \ln(l^2 + 1) = l$

$\Leftrightarrow -\ln(l^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow l^2 + 1 = 1$

$\Leftrightarrow l^2 = 0$

$\Leftrightarrow l = 0$

5.a.

```
def seuil(h) :
        n=0
        u=7
        while u>h :
                n = n+1
                u = u-ln(u**2+1)
        return n
```

5.b. À la calculatrice, on obtient $u_{96} \approx 0{,}01003$ et $u_{97} \approx 0{,}0099$.

Le programme Python renvoie la valeur 97, rang à partir duquel les termes de la suite deviennent inférieurs à 0,01.

Partie C

1. Sur $[0;\ +\infty[$ la fonction f est croissante ;

$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc $f(x) \geq 0$.

2. La fonction f est continue et positive sur [2 ;4] donc I est l'aire du domaine du plan, exprimée en unité d'aire, compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

3. On a

$$0{,}5x - 1 \leq f(x) \leq 0{,}25x + 0{,}25$$

Les fonctions affines $g(x) = 0{,}5x - 1$ et $h(x) = 0{,}25x + 0{,}25$ sont continues. Par propriété de conservation de l'ordre :

$$\int_2^4 (0{,}5x - 1)dx \leq \int_2^4 f(x)\,dx \leq \int_2^4 (0{,}25x + 0{,}25)dx$$

$$[0{,}25x^2 - x]_2^4 \leq I \leq [0{,}125x^2 + 0{,}25x]_2^4$$

$$0{,}25 \times 4^2 - 4 - 0{,}25 \times 2^2 + 2 \leq I \leq 0{,}125 \times 4^2 + 0{,}25 \times 4 - 0{,}125 \times 2^2 - 0{,}25 \times 2$$

$$1 \leq I \leq 2$$

> **Exercice 4**

1.a. Affirmation 1 fausse

D'après le tableau de variations on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

C_f n'admet pas d'asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

1.b. Affirmation 2 fausse

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5^-$ et, par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 5 = 0^-$

Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{f(x)-5} = -\infty$

2.a. Affirmation 3 vraie

Dérivons deux fois $g(x)$:

$$g'(x) = 1 \times e^{-x} - xe^{-x}$$

$$g''(x) = -e^{-x} - 1 \times e^{-x} + xe^{-x}$$

$$g''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Étudions le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$e^{-x} > 0$ donc $g''(x)$ est du signe de $x - 2$

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = 2$. C_g admet un point d'inflexion au point A d'abscisse 2 et d'ordonnée $g(2)$.

$$g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

Les coordonnées du point d'inflexion sont $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$.

2.b. Affirmation 4 vraie

Étudions le signe de $g(x) - x$ sur]-∞ ; 2] :

$$g(x) - x = xe^{-x} - x$$

$$g(x) - x = x(e^{-x} - 1)$$

Sur]-∞ ; 2] :

$$e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

On a

x	$-\infty$		0		2
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$g(x) - x$		$-$	0	$-$	

Sur]-∞ ; 2] , $g(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq x$

3. Affirmation 5 fausse

On pose $f(x) = x\, ln\, x$ définie et dérivable sur]0 ; +∞[comme produit de fonctions de référence.

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = ln(x) + 1$$

$$\ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1})$$

$$f(e^{-1}) = -e^{-1}$$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Sur l'intervalle]0 ; e^{-1}], la fonction f est inférieure à 0 donc l'équation $x\ln x = 1$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle [e^{-1} ; +∞[la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans l'intervalle [$-e^{-1}$; +∞[.

1 ∈ [$-e^{-1}$; +∞[.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x\ln x = 1$ admet une unique solution sur [e^{-1} ; +∞[.

Finalement, l'équation $x\ln x = 1$ n'admet qu'une solution sur]0 ; +∞[.