Mathématiques : Métropole Jour 1 (19 juin 2024)

> **Exercice 1**

1) Affirmation 1 : Vraie

$$f(x) = -5(-xe^{-x})$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ par croissance comparée.
Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} (-xe^{-x}) = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (-5) = -5$
Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

Affirmation 2 : Vraie
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$$

$$f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5x^{-x}$$

$$f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$$

Donc f est solution de (E) : $y' + y = 5e^{-x}$.

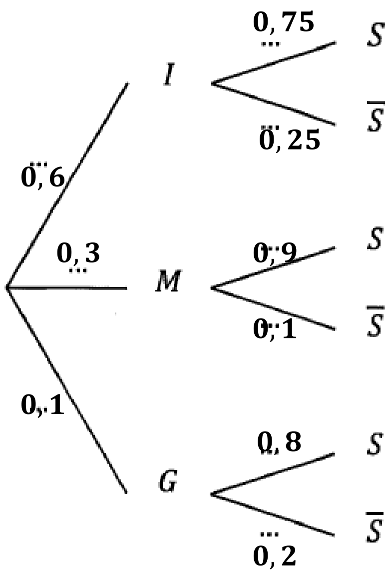
2) Affirmation 3 : Fausse
$-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et $\cos(n)$ diverge.

Affirmation 4 : Vraie
(u_n) est croissante et converge vers -1 $\Leftrightarrow u_0 \leq u_n \leq -1$
(w_n) est décroissante et converge vers 1 $\Leftrightarrow 1 \leq w_n \leq w_0$

Pour tout entier naturel n , on a alors $u_0 \leq u_n \leq -1 \leq v_n \leq 1 \leq w_n \leq w_0$ donc $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

> **Exercice 2**

1)



2) On calcule $P(I \cap S)$

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S)$$
$$P(I \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}75$$
$$P(I \cap S) = 0{,}45$$

La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet est de 0,45.

3) I, M et G forment une partition de l'univers et S est un événement de cet univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S)$$
$$P(S) = P(I \cap S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S)$$
$$P(S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8$$
$$P(S) = 0{,}8$$

4) On calcule $P_S(I)$:

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)}$$
$$P_S(I) = \frac{0{,}45}{0{,}8}$$

$$P_S(I) = 0{,}563$$

La probabilité qu'un client ait acheté sur internet sachant qu'il est satisfait de son achat est de 0,563.

5) a. On répète 30 fois de manière identique et indépendante une expérience à deux issues dont le succès : « Le client est satisfait du service clientèle » a une probabilité de 0,8. La variable aléatoire X qui compte le nombre de clients satisfaits suit une loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0{,}8$.

5) b. On calcule $P(X \geq 25)$

À la calculatrice Numworks, on obtient directement $P(X \geq 25) = 0{,}428$
Avec les calculatrice Casio et T.I. on calcule :

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24)$$
$$P(X \geq 25) = 1 - 0{,}572$$
$$P(X \geq 25) = 0{,}428$$

avec $P(X \leq 24) = BinomialCD(24{,}30{,}0.8)$ sur Casio et $P(X \leq 24) = BinomFrep(30{,}0.8{,}24)$ sur T.I.

La probabilité qu'au moins 25 clients soit satisfaits du service clientèle est de 0,428.

6) « La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est supérieure à 0,99 » correspond à « la probabilité qu' au plus $n-1$ client soit satisfait est supérieure à 0,99 ».
$P(X \leq n-1) \geq 0{,}99$
$\Leftrightarrow 1 - P(X = n) \geq 0{,}99$
$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{n} \times 0{,}8^n \times 0{,}2^0 \geq 0{,}99$
$\Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01$
$\Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leq \ln(0{,}01)$ par croissance de la fonction ln(x) sur]0 ; +∞[
$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ avec $\ln(0{,}8) < 0$
$\Leftrightarrow n \geq 21$

La taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99 est de 21.

7) a. $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T1) + E(T_2)$ par linéarité de l'espérance.
$E(T) = 4 + 3 = 7$
$E(T) = 7$

Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes donc $V(T) = V(T_1) + V(T_2)$
$V(T) = 2 + 1 = 3$

7) b. On calcule $P(|T-7| \leq 2)$:

$$P(|T-7| \leq 2) = 1 - P(|T-7| \geq 3)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$P(|T-7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$$
$$\Leftrightarrow P(|T-7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2}$$
$$\Leftrightarrow P(|T-7| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -P(|T-7| \geq 3) \geq -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|T-7| \geq 3) \geq 1 - \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow P(|T-7| \leq 2) \geq \frac{2}{3}$$

La probabilité qu'un client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure à $\frac{2}{3}$.

> **Exercice 3**

1.a. Déterminons deux vecteurs non colinéaires de (CAD) :

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (CAD) aux coordonnées non proportionnelles. Ils sont non colinéaires.

Calculons :

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1\times 5 - 1\times 5 + 0\times(-10) = 0$$

$\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1\times 0 - 1\times 0 + 0\times\left(-\frac{25}{2}\right) = 0$$

$\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) donc $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

1.b. Une équation cartésienne du plan (CAD) contenant $A(5; 5; 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Ainsi $x - y + d = 0$ et les coordonnées du point A vérifient cette équation cartésienne :

$$\begin{gathered} x_A - y_A + d = 0 \\ \Leftrightarrow 5 - 5 + d = 0 \\ \Leftrightarrow d = 0 \end{gathered}$$

Une équation cartésienne du plan (CAD) est $x - y = 0$.

2.a. Testons les coordonnées du point $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}t \\ \frac{5}{2} = 5 - \frac{5}{2}t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \frac{5}{2} = \frac{5}{2}t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il existe un unique paramètre t solution du système (S) donc $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Testons les coordonnées du point $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ dans l'équation cartésienne du plan (CAD).

$$x_H - y_h = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

Les coordonnées du point $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ vérifient l'équation cartésienne du plan (CAD) donc $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ appartient au plan (CAD). H appartient à la fois à la droite et au plan, donc $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de (CAD).

2.b. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HD}$.

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} 0 - \frac{5}{2} \\ 0 - \frac{5}{2} \\ 10 - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 0 - \frac{5}{2} \\ 0 - \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} - 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 10 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont non proportionnelles donc $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont non colinéaires.

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times 10 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HD} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD) donc la droite (BH) est orthogonale au plan (ACD) et H appartient à la droite et au plan. Donc H est le projeté orthogonal de B sur (ACD).

3.a. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$:

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 5 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculons $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}$:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux donc ABH est rectangle en H.

3.b. Calculons l'aire du triangle ABH :

$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{AH \times BH}{2}$ avec $AH = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $BH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\mathcal{A}_{ABH} = \frac{AH \times BH}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{25}{4} u.a.$$

L'aire du triangle ABH est de $\frac{25}{4}$ u.a.

4.a. Les points $A, B, H\ et\ O$ ont tous une cote nulle $(z = 0)$ donc ils sont coplanaires. De plus C appartient à l'axe des cotes donc (OC) est orthogonale au plan (ABH). Ainsi (OC) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

4.b. Calculons OC :

$$OC = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (10-0)^2} = 10$$

Déterminons le volume du tétraèdre ABCH :

$$V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABH} \times OC$$

$$V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10$$

$$V_{ABCH} = \frac{125}{6}\ u.v.$$

5. ABC est rectangle en B.On appelle h la longueur de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$.

$$V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times h$$

d'où :

$$h = \frac{3V_{ABCH}}{\mathcal{A}_{ABC}}$$

D'autre part :

$$BC = \sqrt{0^2 + (0-5)^2 + (10-0)^2} = 5\sqrt{5}$$
$$AB = \sqrt{(0-5)^2 + (5-5)^2 + (0-0)^2} = 5$$

et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$h = \frac{3 \times \frac{125}{6}}{\frac{25\sqrt{5}}{2}}$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{5}}$$

La distance du point H au plan (ABC) est de $\sqrt{5}$.

> **Exercice 4**

Partie A

1.a. Détermination des limites :

$\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln(x) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}\ln(x) = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

1.b. f est définie et dérivable sur]0 ; +∞[comme somme de fonctions de référence définies et dérivables sur]0 ; +∞[.

$$f'(x) = 1 - 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$$

1.c. Sur]0 ; +∞[, $2x > 0$ et $2x + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

1.d. f' est définie et dérivable sur]0 ;+∞[comme fonction rationnelle.

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

Sur]0 ; +∞[, $2x^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$ et f est concave.

2.a. La fonction f est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞[.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
$0 \in]-\infty; +\infty[$
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur]0 ; +∞[.

$f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = -1$
$f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$
or $-1 \leq 0 \leq \frac{1}{2}\ln 2$
⇔ $f(1) \leq f(\alpha) \leq f(2)$ et la fonction f est strictement croissante sur]0 ; +∞[.
⇔ $1 \leq \alpha \leq 2$

Ainsi $\alpha \in [1; 2]$

2.b. La fonction f est strictement croissante et s'annule en α. Son tableau de signe est :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

2.c. On a démontré que $f(\alpha) = 0$:

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$$

Partie B

1. Pour tout $x \in]0; 1]$:

$$g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$$
$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x$$
$$g'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln(x)$$

Et pour tout $x \in]0; 1]$:

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}\ln(x)$$
$$xf(x) = g'(x)$$

2.a.

	$x \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha}$
ainsi	$\frac{1}{x} > \alpha$ par décroissance de la fonction inverse sur]0 ; +∞[.
et	$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha)$ par croissance de la fonction f sur]0 ; +∞[.
De plus	$f(\alpha) = 0$
donc	$f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$.

2.b. Pour tout $x \in]0; 1]$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'après le tableau de signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$, on en déduit les variations de g sur $]0; 1]$.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	$g(1)$

Partie C

1.a. Sur l'intervalle]0 ;1] on a

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$$

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

$\forall x \in \ ]0;1]\ x^2 > 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $-\frac{1}{4}x^2\ln(x) > 0$

$\forall x \in \ ]0;1]\ g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) > 0$ donc C_g est située au-dessus de $\mathcal{P}$ sur]0 ;1].

1.b. Par intégration par partie on a :

u et v sont deux fonctions continues, définies et dérivables sur $\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$ par :

$u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx = \frac{1}{3\alpha^3}\ \ln(\alpha) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{3\alpha^3}\left(2(2-\alpha)\right) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{\alpha}; 1\right], g(x) \geq -\frac{7}{8}x^2 + x > 0$ d'après les questions Partie B, 2a. et Partie C 1a.

L'aire du domaine du plan délimité par $C_g, \mathcal{P}$ et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$ est assimilable à $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) dx$ exprimée en unité d'aire.

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x)\, dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx$$

Ainsi

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \text{ u.a.}$$