Mathématiques : Centres Etrangers Jour 2 (6 juin 2024)

> **Exercice 1 :**

1. L'ordre compte, tous les éléments ne sont pas utilisés, et les répétitions sont possibles. Il s'agit d'un k-uplet :

$$8^3 = 512$$

Il y a 512 tirages possibles.

2.a. Les répétitions sont interdites, il s'agit d'un arrangement :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Il y a 336 tirages possibles sans répétition de numéro.

2.b. 512 – 336 = 176
Il y a 176 tirages possibles contenant au moins une répétition de numéro.

3.

x_1	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. $E(X_1) = \frac{1}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8) = \frac{36}{8} = 4{,}5$
L'espérance de la variable aléatoire X_1 est de 4,5.

5.

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$
$$E(S) = 3E(X_1)$$
$$E(S) = 3 \times 4{,}5$$
$$E(S) = 13{,}5$$

6. $P(S = 24) = P[(X_1 = 8) \cap (X_2 = 8) \cap (X_3 = 8)]$

$$P(S = 24) = \left(\frac{1}{8}\right)^3$$
$$P(S = 24) = \frac{1}{512}$$

7.a. On peut dénombrer les combinaisons conduisant à 22 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	4	5	6	7	8	9	10	1
2	5	6	7	8	9	10	11	12	2
3	7	8	9	10	11	12	13	14	3
4	9	10	11	12	13	14	15	16	4
5	11	12	13	14	15	16	17	18	5
6	13	14	15	16	17	18	19	20	6
7	15	16	17	18	19	20	21	22	7
8	17	18	19	20	21	22	23	24	8

Pour obtenir une somme des chiffres supérieure ou égale à 22 il faut tirer les combinaisons suivantes :
(7 ; 7 ; 8) – (7 ; 8 ; 7) – (8 ; 7 ; 7)
(8 ; 8 ; 6) – (8 ; 6 ; 8) – (6 ; 8 ;8)
(8 ; 8 ; 7) – (8 ; 7 ; 8) – (7 ; 8 ; 8)
(8 ; 8 ; 8)

Il existe 10 tirages exactement permettant de gagner un lot.

7.b.
Il y a 10 tirages gagnants sur 512 tirages possibles.

$$\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

La probabilité de gagner un lot est de $\frac{5}{256}$.

> **Exercice 2**

1.a. $\lim_{x \to 1} e^x = e$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^-$
Par quotient $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

1.b. La courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

2. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$
Par quotient $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3.a. La fonction f est définie et dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme quotient de fonctions de référence définies et dérivables sur $]-\infty; 1[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{(e^x \times (x-1) - 1 \times e^x)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

3.b. Pour tout $x \in]-\infty; 1[, e^x > 0 \; et \; (x-1)^2 > 0$ donc $f(x)$ est du même signe que $x - 2$.

$$x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2$$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$

4.a. Étudions le signe de $f''(x)$;

Pour tout $x \in]-\infty; 1[, e^x > 0 \; et \; (x-1)^3 > 0$
$f''(x)$ est du signe de $x^2 - 4x + 5$.
Étudions le signe du polynôme $x^2 - 4x + 5$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$$

$\Delta < 0$ donc le polynôme $x^2 - 4x + 5$ n'a pas de racine et est du signe de son coefficient dominant a = 1, positif sur $]-\infty; 1[$

Ainsi pour tout $x \in]-\infty\,; 1[$, $f''(x) > 0$ et f est convexe sur $]-\infty\,; 1[$.

4.b. L'équation de la tangente T à la courbe C en 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = -2$$

$$f(0) = \frac{e^0}{0-1} = -1$$

$$y = -2x - 1$$

L'équation de T est $y = -2x - 1$.

4.c. La fonction f est convexe sur $]-\infty\,; 1[$ donc sa courbe représentative C est située au dessus de ses tangentes. En particulier en $x = 0$, on a :

$$f(x) \geq -2x - 1$$
$$\frac{e^x}{x-1} \geq -2x - 1$$

Et sur $]-\infty\,;1[\,, x - 1 > 0$

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

5.a. la fonction f est continue et strictement monotone sur $]-\infty\,;1[$.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$.
$-2 \in]-\infty; 0[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[$.

5.b. À la calculatrice on a :

$$f(0{,}31) \approx -1{,}98$$
$$f(0{,}32) \approx -2{,}03$$

Donc

$$0{,}31 \leq \alpha \leq 0{,}32$$

> **Exercice 3**

1. $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$

2. $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ ne sont visiblement pas proportionnelles donc ces deux vecteurs sont non colinéaires.

$$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{EJ} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{FI}.\overrightarrow{EJ} = -\frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 - 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI) donc le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Une équation cartésienne du plan (FHI) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur normal au plan.
D'après la question précédente, on en déduit que $a = 1, b = 1$ et $c = -\frac{1}{2}$.
De plus, F appartient au plan (FHI). Ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan.

$$1 \times 1 + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 + d = 0$$
$$1 - \frac{1}{2} + d = 0$$
$$\frac{1}{2} + d = 0$$
$$d = -\frac{1}{2}$$

Une équation cartésienne du plan (FHI) est $x + y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$.
En multipliant l'équation par -2, on a une équation cartésienne de (FHI) :
$$-2x - 2y + z + 1 = 0$$

4. la droite (EJ) est dirigée par $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et passe par $E(0; 0; 1)$

Une équation paramétrique de (EJ) est : $(EJ) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

5.a. K appartient au plan (FHI) et K appartient à (EJ) orthogonale au plan (FHI). Ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \\ -2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \\ -2t - 2t + 1 - \dfrac{1}{2}t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \\ -\dfrac{9}{2}t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \\ t = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \\ z = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} \\ t = \frac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{9} \\ y = \frac{4}{9} \\ z = \frac{7}{9} \\ t = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Le point K, projeté orthogonal de E sur le plan (FHI) a pour coordonnées $K\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$.

5.b. On admet que $L\left(\frac{1}{2};0\,;1\right)$ est le projeté orthogonal de I sur (EFH). Donc IL est une hauteur de la pyramide EFHI et IL = 1.

$$V_{EFHI} = \frac{1}{3}\times IL\times\frac{EH\times EF}{2}$$
$$V_{EFHI} = \frac{1}{3}\times 1\times\frac{1\times 1}{2}$$
$$V_{EFHI} = \frac{1}{6}\ cm^3$$

5.c. (EJ) est orthogonal au plan (FHI) et coupe le plan en K donc EK est une hauteur de la pyramide EFHI.

$$EK = \sqrt{\left(\frac{4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{7}{9}-1\right)^2}$$

$$EK = \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}}$$
$$EF = \sqrt{\frac{36}{81}}$$

$$EF = \frac{6}{9}$$

$$V_{EFHI} = \frac{1}{3}\times EF\times A_{FHI}$$
$$A_{FHI} = \frac{3V_{EFHI}}{EF}$$

$$A_{FHI} = \frac{\left(3\times\frac{1}{6}\right)}{\frac{6}{9}}$$

$$A_{FHI} = \frac{3}{4}\ cm^2$$

> **Exercice 4**

Partie A

1. f est définie et dérivable sur [0 ; +∞[comme composée de fonctions définies et dérivables sur [0 ;+∞[, $x-1$ ne s'annulant pas sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Une racine carrée étant positive pour tout x appartenant à [0; +∞[, $f'(x)$ est strictement positive sur [0 ;+∞[et f est strictement croissante sur [0; +∞[.

2. Pour tout $x \in [0; +\infty[$:
$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x$
$f(x) - x = \frac{(\sqrt{x+1}-x)(\sqrt{x+1}+x)}{\sqrt{x+1}+x}$ (par produit avec la quantité conjuguée).
$f(x) - x = \frac{\sqrt{x+1}^2 - x^2}{\sqrt{x+1}+x}$ (d'après l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$).
$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$

3. Pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$, $\Delta > 0$ donc l'équation $-x^2 + x + 1 = 0$ admet 2 solutions réelles :
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Or $x_2 < 0$ donc l'équations $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur [0 ; +∞[.

Partie B
1. Soit $P(n)$ la propriété : $1 < u_{n+1} < u_n$
Initialisation :
$u_0 = 5$ et $u_1 = f(u_0) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$
On a $1 < u_1 < u_0$
$P(0)$ est vraie.

Hérédité :
Supposons $P(k)$ vraie pour un entier naturel k c'est-à-dire $1 < u_{k+1} < u_k$.
Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $1 < u_{k+2} < u_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence :

$$1 < u_{k+1} < u_k$$

La fonction f est strictement croissante sur [0 ; +∞[. Elle conserve l'ordre. Ainsi :

$$1 < f(u_{k+1}) < f(u_k)$$
$$\sqrt{2} < u_{k+2} < u_{k+1}$$
$$1 < u_{k+2} < u_{k+1}$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc $1 < u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n.

2. D'après la question précédente $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
De plus $1 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.
D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

3. On a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n+1} = \sqrt{\ell+1}$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$, donc $\ell = \sqrt{\ell+1}$.
D'après la question 3 de la partie A, cette équation admet comme unique solution $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.a. À la calculatrice on a $u_4 - \ell \approx 0{,}02$ et $u_5 - \ell \approx 0{,}007$
seuil(2) renvoie la valeur 5.

4.b. À la ligne 6 de l'algorithme on reconnait la définition de la limite finie d'une suite.
L'intervalle ouvert $]\ell - 10^{-4} ; \ell + 10^{-4}[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang $n = 9$.