Mathématiques : Centres Etrangers Jour 1 (05 juin 2024)

> **Exercice 1 :**

Partie A :

1. f est définie sur $[0\ ;1]$ est dérivable sur ce même intervalle comme fonction rationnelle dont le dénominateur est à valeurs non nulles sur $[0\ ;1]$.

$$f'(x) = \frac{0{,}96 \times (0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x \times 0{,}93}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

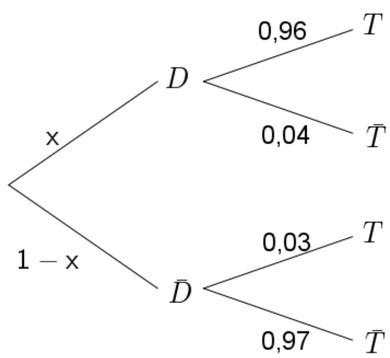
$$f'(x) = \frac{0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0{,}028}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

2. Pour tout x appartenant à [0 ;1], $(0{,}93c + 0{,}03)^2 > 0$ et $0{,}028 > 0$. Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; 1]$ et f est strictement croissante sur $[0\ ;1]$.

Partie B

1. D'après les données de l'énoncé, on a :



2. On détermine $P(D \cap T)$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T)$$

$$P(D \cap T) = x \times 0{,}96$$

$$P(D \cap T) = 0{,}96x$$

La probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif est de $0{,}96x$

3. On détermine $P(T)$.

D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers et T est un événement de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$$

$$P(T) = P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T)$$

$$P(T) = x \times 0{,}96 + (1 - x) \times 0{,}03$$

$$P(T) = 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x$$

$$P(T) = 0{,}93x + 0{,}03$$

4. Déterminons $P_T(D)$:

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(D) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$$

On a donc $P_T(D) = f(x)$ avec x la proportion de sportifs dopés.

Pour 50 sportifs dopés sur 1000, la proportion x est :

$$x = \frac{50}{1000}$$

$$x = 0{,}05$$

Ainsi $P_T(D) = f(0{,}05)$

$$f(0{,}05) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03}$$

$$f(0{,}05) \approx 0{,}63$$

La probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est de 0,63.

5.a. La valeur prédictive positive est $P_T(D)$.

On résout $f(x) \geq 0{,}9$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}96x}{0{,}93x+0{,}03} \geq 0{,}9$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}96x}{0{,}93x+0{,}03} - 0{,}9 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}96x-0{,}9(0{,}93x+0{,}03)}{0{,}93x+0{,}03} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}96x-0{,}837x-0{,}027}{0{,}93x+0{,}03} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}123x-0{,}027}{0{,}93x+0{,}03} \geq 0$

Or sur [0 ;1], $0{,}93x + 0{,}03 > 0$

On résout alors

$$0{,}123x - 0{,}027 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0{,}123x \geq 0{,}027$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{0{,}027}{0{,}123}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0{,}22$$

La valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure à 0,9 à partir de $x = 0{,}22$.

b. En ciblant les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés on augmente la proportion de sportifs dopés dans l'échantillon testé. La valeur de x augmente.

La fonction f est strictement croissante pour $x \in [0; 1]$. Donc si x augmente, alors f augmente. Comme $f(x)$ modélise la valeur prédictive positive, celle-ci sera donc plus élevée si l'on décide de ne tester que les sportifs les plus performants.

> **Exercice 2**

1.a. Pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow 2xe^{-x} = x$$

$$\Leftrightarrow 2xe^{-x} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2e^{-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2e^{-x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln 2$$

L'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions sur $[0; 1]$, $x = 0$ et $x = \ln 2$

1.b. Pour tout x appartenant à [0 ;1], f est dérivable comme produit de fonctions définies et dérivables sur [0 ;1]

$$f'(x) = 2 \times e^{-x} + 2x \times (-e^{-x})$$

$$f'(x) = e^{-x}(2 - 2x)$$

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$$

1.c. Pour tout x appartenant à [0 ;1] :

2 > 0 , $1 - x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) \geq 0$

Ainsi f est croissante sur [0 ;1]

x	0		1
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$

$$f(0) = 2 \times 0 \times e^{0} = 0$$

$$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1}$$

2.a. Soit la propriété P(n) : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation :

$u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(u_0) = 2 \times 0{,}1 \times e^{-0{,}1} = 0{,}2e^{-0{,}1} \approx 0{,}18$

donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$. P(0) est vraie.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel k c'est-à-dire $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$.

Montrons que $0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 1$ est vraie.

par hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme la fonction f est croissante sur [0;1], l' ordre est conservé.

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$$

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2e^{-1}$$

$$0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$$

La propriété est vraie au range $k + 1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout entier naturel n.

2.b. D'après la question précédente $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

De plus $u_n \leq 1$. La suite (u_n) est majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

3. La suite (u_n) converge vers un réel M ≤ 1, solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question 1.a, l'équation $f(x) = x$ admet 2 solutions sur $[0; 1]$: $x = 0$ et $x = \ln 2$. Or la suite (u_n) est minorée par son premier terme $u_0 = 0{,}1$. De plus, elle est croissante donc sa limite est $\ln 2$.

4.a. La suite (u_n) est croissante et sa limite est $\ln(2)$. Ainsi :

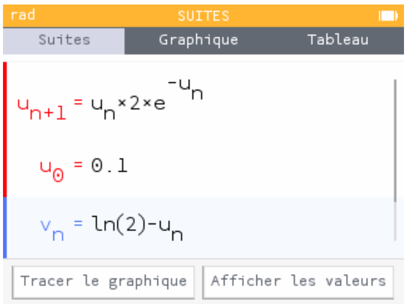
$$0{,}1 \leq u_n \leq \ln 2$$

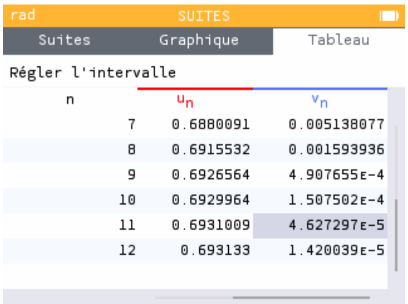
$$\text{d'où } \ln 2 - u_n \geq 0$$

4.b. L'instruction while doit contenir le contraire de la condition recherchée. Le calcul des termes de la suite se fait avec sa formule de récurrence.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln(2) – u > 0.0001 :
        n = n + 1
        u = 2*u*exp(-u)
    return (u, n)
```

4.c. À la calculatrice on peut saisir la suite u_n et une suite définie par $v_n = \ln 2 - u_n$. On cherche $v_n < 0{,}0001$. On trouve $n = 11$.





n	u_n	v_n
7	0.6880091	0.005138077
8	0.6915532	0.001593936
9	0.6926564	4.907655E-4
10	0.6929964	1.507502E-4
11	0.6931009	4.627297E-5
12	0.693133	1.420039E-5

> Exercice 3

1. Soit $f(x) = c$ une fonction constante avec c un réel. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$.

f est solution de (E_0) ⇔ $f'(x) = f(x)$

f est solution de (E_0) ⇔ 0 = c

Ainsi l'unique fonction constante solution de (E_0) est la fonctions nulle $f(x) = 0$.

2. Toutes les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme $g(x) = ke^x + f(x)$ avec $f(x)$ une solution particulière de (E_0). D'après la question 1, $f(x) = 0$.

Ainsi les solutions de (E_0) sont les fonctions $g(x) = ke^x$ avec k un réel.

3. D'une part :

$$h'(x) = 2 \times (-\sin(x)) \ + \cos(x)$$

$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$

D'autre part :

$$h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$$

Ainsi $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$

Donc h est solution de (E).

4. $f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow (f-h)' = (f-h)$

$f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f' - h' = f - h$

$f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f' = f - h + h'$

$f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) - 2\cos(x) - \sin(x) - 2\sin(x) + \cos(x)$

$f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$

$f-h$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow f$ est solution de (E)

5. Le solutions de (E_0) sont les fonctions $g(x) = ke^x$ d'après la question 2.

Ainsi $f(x) - h(x) = ke^x$

donc $f(x) = ke^x + h(x)$

$f(x) = ke^x + 2cos(x) + sin(x)$ sont les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).

6. Déterminons la valeur de k

$$g(0) = ke^0 + 2\cos(0) + \sin(0)$$
$$\Leftrightarrow g(0) = k + 2$$
$$\Leftrightarrow k + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -2$$

L'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 0$ est la fonction

$g(x) = -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)$

7.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,dx = [-2e^x + 2\sin(x) - \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,dx = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-2e^0 + 2\sin(0) - \cos(0))$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,dx = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - (-2 - 1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,dx = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 5$$

> **Exercice 4**

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1+2\\3-0\\0-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+2\\-1-0\\2-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\frac{0}{-2} \neq \frac{3}{1}$ ainsi les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2.a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 1 + 9 - 10 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 \times 0 = 3 - 3 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

2.b. Une équation cartésienne de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

De plus, A appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan. On a :

$$1 \times (-2) + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 10 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -8$$

Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

2.c. Vérifions si D appartient au plan (ABC)

$$x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8$$

$$x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 7$$

Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC) donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3.a. Pour le paramètre $t = 0$ on a le point de D_1 de coordonnées $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ soit le point D. On en déduite que la droite D_1 passe par D.

De plus, d'après l'équation paramétrique de D_1, un vecteur directeur de D_1 est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a $\vec{u} = \vec{n}$ vecteur orthogonal à (ABC) d'après la question 2.a donc D_1 est orthogonale au plan (ABC).

D_1 passe par D et est orthogonale à (ABC) donc D_1 est une hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

3.b. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 8 + 15s = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right) \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet un unique couple $(t\ ;\ s)$ de solution $\left(\frac{1}{7}; -\frac{2}{7}\right)$.

Pour $t = \frac{1}{7}$, on en déduit les coordonnées du point de la droite D_1 intersection avec D_2 :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{3}{7} \\ z = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2 sont $\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$.

4.a.

Le point H, projeté orthogonal de D sur (ABC), appartient à la fois à la droite D_1 et au plan (ABC).

On résout le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ x + 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t + 3 \times 3t + 5 \times (3 + 5t) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ 35t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \\ z = 2 \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$

4.b. D_1est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D et H appartient à D_1 et à (ABC) donc H est le pied de la hauteur issue de D. Ainsi la distance du point D au plan (ABC) est DH.

$$DH = \sqrt{(x_H - y_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$$

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$DH = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + \frac{25}{25}}$$

$$DH = \sqrt{\frac{35}{25}}$$

$$DH = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

$$DH \approx 1{,}18$$