

Mathématiques : Centres Etrangers Jour 2 (06 juin 2024)

> **Exercice 1 :**

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminons les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition :

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée. $\lim_{x \rightarrow 0} (-x \ln(x)) = 0$ par produit avec -1.

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- $x^2 - x \ln(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

Par somme et produit sur les limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 2x - 1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$$

3. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

4. Étude des variations de f' :

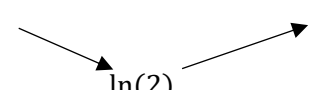
$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Donc pour tout $x > 0$, $f''(x)$ a le même signe que $2x - 1$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ est négative sur $]0 ; \frac{1}{2}]$ donc f' est décroissante sur $]0 ; \frac{1}{2}]$.

$f''(x)$ est positive sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ donc f' est croissante sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'			

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln(2) - 1$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

5. D'après la question précédente, la fonction f' admet un minimum de $\ln(2)$ en $x = \frac{1}{2}$ sur $]0; +\infty[$.

Ainsi $f'(x)$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

1. Dérivons g :

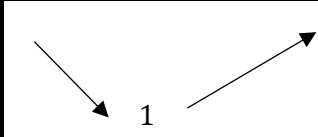
$$g(x) = x - \ln(x)$$

$$\text{ainsi } g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{x}$$

Sur $]0; +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g			

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1$$

2. Résolution de $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x \ln(x) = x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(x - \ln(x)) = x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x g(x) = x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x g(x) - x = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(g(x) - 1) = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } g(x) - 1 = 0$$

Or $x > 0$ donc :

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) - 1 = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 1$$

D'après la question précédente, l'équation $g(x) = 1$ admet 1 comme unique solution.

Donc l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution $x = 1$ sur $]0; +\infty[$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

1. Soit la propriété $P(n) : \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,6$

Ainsi $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ et $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier naturel k , c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$.

Montrons que $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence on a : $\frac{1}{2} \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$

Et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f strictement croissante sur $]0; +\infty[$ d'après la question 5, partie A.

donc

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout entier naturel n .

2. D'après la question précédente, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

De plus, $u_n \leq 1$ donc la suite (u_n) est majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée converge.

Donc (u_n) converge.

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(\ell)$

Or par unicité de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ donc $f(\ell) = \ell$

D'après la question 2, partie B, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell = 1$.

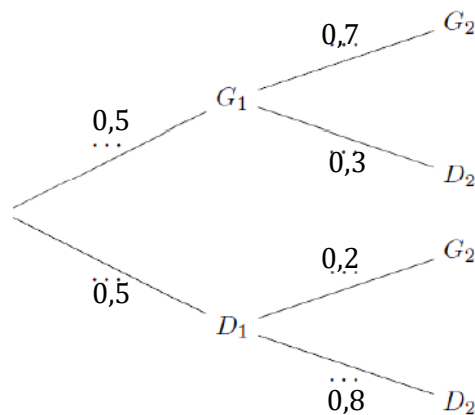


> Exercice 2

1. $P_{G_1}(D_2)$ est la probabilité que Léa perde la deuxième partie sachant qu'elle a gagné la première partie. C'est la probabilité de l'événement contraire : « Léa gagne la partie suivante sachant qu'elle a gagné la précédente ». D'après l'énoncé :

$$P_{G_1}(D_2) = 1 - 0,7 = 0,3$$

2.



3. g_2 est $P(G_2)$. G_1 et D_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

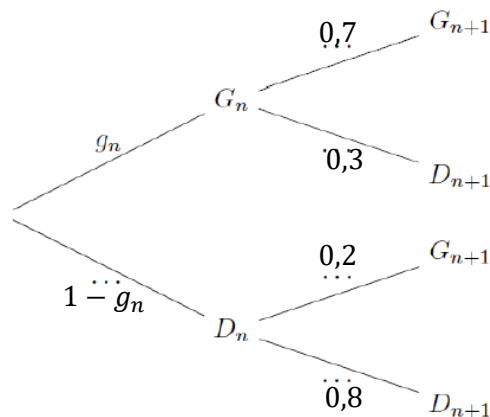
$$g_2 = P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2)$$

$$g_2 = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2)$$

$$g_2 = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2$$

$$g_2 = 0,45$$

4.a. On a :





4.b. G_n et D_n forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$g_{n+1} = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1})$$

$$g_{n+1} = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1})$$

$$g_{n+1} = g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2$$

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$$

5.a.

$$v_{n+1} = g_{n+1} - 0,4$$

$$v_{n+1} = 0,5g_n + 0,2 - 0,4$$

$$v_{n+1} = 0,5g_n - 0,2$$

$$v_{n+1} = 0,5 \left(g_n - \frac{0,2}{0,5} \right)$$

$$v_{n+1} = 0,5(g_n - 0,4)$$

$$v_{n+1} = 0,5v_n$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,1$

5.b. Du résultat précédent on en déduit la forme explicite de (v_n) :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$v_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Or } v_n = g_n - 0,4 \Leftrightarrow g_n = v_n + 0,4$$

$$\text{donc } g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

6. Étude des variations de la suite (g_n) :

$$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4$$

$$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1}$$

$$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^n (1 - 0,5^{-1})$$

$$g_{n+1} - g_n = -0,1 \times 0,5^n$$

Ainsi $g_{n+1} - g_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et la suite (g_n) est strictement décroissante.

7. Limite de la suite (g_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0 \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ lorsque } -1 < q < 1$$

$$\text{Donc par produit puis somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0,4$$

La probabilité que Léa gagne la n -ième partie tend vers 0,4 après un grand nombre de parties jouées.

8. Résolvons :

$$g_n - 0,4 \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow v_n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow 0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow 0,5^{n-1} \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,5^{n-1}) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \times \ln(0,5) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8$$

Le plus petit entier naturel n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$ est $n = 8$.

9.

while $g > 0.4 + e$: on indique la condition contraire de ce qu'on veut.

$g = 0.5 * g + 0.2$ on note qu'il manque un $*$ entre 0.5 et g dans le code proposé.

$n = n + 1$ on incrémente la valeur de n d'une unité à chaque boucle effectuée.

> **Exercice 3**

1. Affirmation vraie :

$$\frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2} = 3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} 6 + 1/n^2 = 6. \text{ Donc par quotient } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. Affirmation fausse

D'après la représentation graphique de la fonction h' :

h' est croissante sur $[-1 ; 1,4]$ et décroissante sur $[1,4 ; 3]$ donc

h est convexe sur $[-1 ; 1,4]$ et concave sur $[1,4 ; 3]$.

3. Affirmation vraie

Dénombrons le nombre total de codes. On choisit 4 fois 1 chiffre parmi 10 puis 1 lettre parmi 3 puis une lettre parmi 2. Le choix des chiffres est un k-uplet, le choix des lettres est un arrangement.

$$10^4 \times 3 \times 2 = 60\,000$$

Dénombrons le nombre de code sans 0. On choisit 4 fois un chiffre parmi 9 puis 1 lettre parmi 3 puis une lettre parmi 2.

$$9^4 \times 3 \times 2 = 39\,366$$

Le nombre de codes avec au moins un zéro est le nombre total de code privé du nombre de codes sans 0 : $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$

4. Affirmation vraie

$$\begin{aligned} x \times f'(x) - f(x) &= x \times \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) - x \ln(x) \\ x \times f'(x) - f(x) &= x \times (\ln(x) + 1) - x \ln(x) \\ x \times f'(x) - f(x) &= x \ln(x) + x - x \ln(x) \\ x f'(x) - f(x) &= x \end{aligned}$$

> **Exercice 4**

Partie A

1. Testons les coordonnées des points dans l'équation du plan :

$$2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 2 + 3 - 1 = 0 \text{ donc } A(1; 0; 1) \in (P)$$

$$2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0 \text{ donc } B(2; -1; 1) \in (P)$$

$$2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \text{ donc } C(-4; -6; 5) \notin (P)$$

2. Montrons l'orthogonalité de (CC') au plan (P) :

D'après l'équation cartésienne du plan (P) , un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De plus : $\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 0 + 4 \\ -2 + 6 \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires donc la droite (CC') est orthogonale au plan (P) .

Vérifions l'appartenance de C' au plan (P) :

$$2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = -4 + 3 + 1 = 0$$

Les coordonnées de C' vérifient l'équation cartésienne du plan (P) donc C' appartient au plan (P) .

Ainsi C' appartient au plan (P) et (CC') est orthogonale au plan (P) donc C' est le projeté orthogonal de C sur (P) .

3. La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$ et passe par $A(1; 0; 1)$.

Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -1 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de (AB) est $(AB): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$



4. D'après les deux conditions énoncées, les coordonnées de $H(x_H; y_H; z_H)$ vérifient l'équation paramétrique de (AB) et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -4 - x_H \\ -6 - y_H \\ 5 - z_H \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4 - x_H) \times 1 + (-6 - y_H) \times (-1) + (5 - z_H) \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 - x_H + 6 + y_H = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_H + y_H + 2 = 0$$

On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -t \\ z_H = 1 \\ -x_H + y_H + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -t \\ z_H = 1 \\ -1 - t - t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -t \\ z_H = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{3}{2} \\ y_H = -\frac{1}{2} \\ z_H = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont $H\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

Partie B

$$1. \|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2}$$

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\frac{121}{4} \times 2 + 16}$$

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \frac{3\sqrt{34}}{2}$$

2. Le point H appartient à la droite (AB) et (HC) est perpendiculaire à (AB) donc $[HC]$ est une hauteur du triangle ABC .

$$AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{AB \times HC}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{34}}{2}}{2}$$



$$S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

L'aire du triangle ABC est $S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$ u.a.

Partie C

1. 1^{ère} méthode :

On rappelle que C' est le projeté orthogonal de C sur (P) . On calcule :

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC'} = HC'^2 = HC \times HC' \times \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{HC'^2}{HC \times HC'} = \frac{HC'}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\frac{3\sqrt{34}}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 70,5^\circ$$

2^{ème} méthode plus rapide :

On rappelle que C' est le projeté orthogonal de C sur (P) et que $H \in (P)$ donc $C'HC$ est un triangle rectangle en C' .

$$\text{Ainsi } \cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{\frac{3\sqrt{34}}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{2.a. } \overrightarrow{C'H} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ -\frac{1}{2} + 2 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C'H} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C'H} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times (-1) + 2 \times 0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$\overrightarrow{C'H} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{C'H}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. De plus H appartient à (AB) donc les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.

2.b. Dans le triangle ABC' , $[C'H]$ est la hauteur relative à $[AB]$.

$$S' = \frac{C'H \times AB}{2}$$

$$S' = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}} \times \sqrt{2}}{2}$$

$$S' = \frac{\sqrt{17}}{2}$$



L'aire du triangle ABC' est $S' = \frac{\sqrt{17}}{2}$ u.a.

2.c. On a $S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$, $S' = \frac{\sqrt{17}}{2}$ et $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$.

On a donc $S' = S \times \cos(\alpha)$