Mathématiques : Centres Etrangers Jour 1 (05 juin 2024)

> **Exercice 1 :**

Partie A :

1. Tableau de variations de f sur [0 ; 5]

x	0	1,5	5
f	$-5{,}4$ ↗	2	↘ $0{,}3$

2. Par le point A passe la tangente à C_f au point d'abscisse 2,5. Cette tangente traverse la courbe. La fonction semble concave sur [0 ; 2,5] et convexe sur [2,5 ; 5]. Le point A semble être un point d'inflexion.

3. La fonction f est croissante sur [0 ; 1,5] et décroissante sur [1,5 ; 5] donc sa fonction dérivée est positive sur [0 ; 1,5] et négative sur [1,5 ; 5]. C'est la fonction représentée par la courbe C_2 qui correspond à ces signes.

La fonction semble concave sur [0 ; 2,5] et convexe sur [2,5 ; 5]. Sa fonction dérivée seconde est négative sur [0 ; 2,5] et positive sur [2,5 ; 5]. C'est la fonction représentée par la courbe C_1 qui correspond à ces signes.

4. La courbe représentative de la primitive de la fonction est croissante sur [0 ; 0,5] et décroissante sur [0,5 ; +∞[. La fonction est donc positive sur [0 ; 0,5] et négative sur [0,5 ; +∞[.

Or la fonction f est négative sur [0 ; 0,5] et positive sur [0,5 ; +∞[. La courbe C_3 ne peut donc pas être la représentation graphique d'une primitive de la fonction f.

Partie B

1.a. f est dérivable sur [0 ; +∞[comme produit entre une fonction affine et une composé de fonction exponentielle et affine, dérivables sur [0 ; +∞[.

$$f'(x) = 4 \times e^{-x+1} + (4x - 2) \times (-e^{-x+1})$$

$$f'(x) = e^{-x+1} \times (4 - 4x + 2)$$

$$f'(x) = (-4x + 6)e^{-x+1}$$

1.b. Etude du signe de $f'(x)$:

Pour tout x de [0 ; +∞[, $e^{-x+1} > 0$.

D'autre part, $-4x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

$f'(x)$ est du même signe que $-4x + 6$.

Dressons le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-2e$	$\nearrow$	$4e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$$f(0) = (4 \times 0 - 2)e^{-0+1} = -2e$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-\frac{1}{2}}$$

1.c. Étudions le signe de $f''(x)$ après avoir déterminé son expression :

$$f''(x) = -4 \times e^{-x+1} - e^{-x+1} \times (-4x + 6)$$

$$f''(x) = (4x - 10)e^{-x+1}$$

Pour tout x de [0 ; +∞[, $e^{-x+1} > 0$

D'autre part $4x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

$f''(x)$ est du même signe que $4x - 10$

Dressons le tableau de signe de f'' :

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	point d'inflexion	convexe	

La fonction f est concave sur [0 ; 2,5] et convexe sur [2,5 ; +∞[. Sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 2,5 : f admet un point d'inflexion d'abscisse $x = 2,5$.

2.a. F est dérivable comme produits de fonctions dérivables sur [0 ;+∞[.

$$F'(x) = ae^{-x+1} - e^{(-x+1)}(ax+b)$$

$$F'(x) = (-ax - b + a)e^{-x+1}$$

Or $F'(x) = f(x)$ donc par unicité des coefficients on a :

$$\begin{cases} -a = 4 \\ -b + a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ -b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$$

Une primitive de f est $F(x) = (-4x - 2)e^{-x+1}$.

2.b.

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)dx$$

$$I = [F(x)]_{3/2}^{8}$$

$$I = F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$I = (-4 \times 8 - 2)e^{-8+1} - \left(-4 \times \frac{3}{2} - 2\right)e^{-\frac{3}{2}+1}$$

$$I = -34e^{-7} + 8e^{-\frac{1}{2}}$$

$$I \approx 4{,}82$$

3.a. Calculons $f\left(\frac{3}{2}\right)$:

D'après la question 1.b, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43$

La hauteur au point de départ D est d'environ 2m43.

3.b. D'après les questions précédentes, la fonction f est continue et positive sur $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 8\right]$.

Ainsi l'aire du domaine du plan située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = \frac{3}{2}$ et $x = 8$ est $I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)dx$ exprimée en unité d'aire.

La surface du mur est de 4,82 m^2.

$0{,}75 \times 4{,}82 = 3{,}615$ et $\frac{3{,}615}{0{,}8} \approx 4{,}5$

Il faut peindre 3,615 m^2 de surface. 5 bombes aérosol de 150 mL seront nécessaires.

> **Exercice 2**

1. Vérifions la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-3\\-1+1\\0-1\end{pmatrix} \ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\3+1\\2-1\end{pmatrix} \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$$

On remarque que $\frac{0}{4} \neq -\frac{1}{1}$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les point A, B et C ne sont pas alignés.

2.a. Vérifions si $\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4-3\\3+1\\-2-1\end{pmatrix} \ \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

2.b. Vérifions la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-0\\3-3\\-2-2\end{pmatrix} \ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires et de même sens et les point A, B, C et D sont coplanaires donc ABDC est un trapèze.

3.a. Les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$n.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0$

$n.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

3.b. $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) passant par C.

On a : $2x + 1y + 2z + d = 0$ et coordonnées de C vérifient l'équation cartésienne du plan.

$$2 \times 0 + 3 + 2 \times 2 + d = 0 \iff 7 + d = 0 \iff d = -7$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3.c. La droite Δ passe par $S(2;1;4)$ et est dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, Δ étant orthogonale à (ABC).

Une équation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3.d. Les coordonnées du point I sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \\ 2x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \\ 2(2 + 2t) + 1 + t + 2(4 + 2t) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \\ 6 + 9t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) \\ y = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ z = 4 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{8}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de I, intersection de Δ et (ABC) sont $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Calcul de SI :

$$SI = \sqrt{(x_I - x_S)^2 + (y_I - y_S)^2 + (z_I - z_S)^2}$$

$$SI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2}$$

$$SI = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}}$$

$$SI = \sqrt{\frac{36}{9}}$$

$$SI = \frac{6}{3}$$

$$SI = 2\ cm$$

4.a. $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}4-3\\-1-3\\0+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}x=4k\\y=3\\z=2-4k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (CD) passant par C et dirigée par $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}=1\times 4-4\times 0+1\times(-4)=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{HB}$et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

H appartient à (CD) si ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de (CD) :

$$\begin{cases}3=4k\\3=3\\-1=2-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{3}{4}\\3=3\\k=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Il existe un unique réel k solution du système donc H appartient à (CD).

H appartient à (CD) et (HB) et (CD) sont perpendiculaires donc H est le projeté orthogonal de B sur (CD).

$$HB=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=\sqrt{2\times 9}=3\sqrt{2}\ cm.$$

4.b. ABDC est un trapèze et d'après la question 2.b, ses bases sont [AB] et [CD].

H est le projeté orthogonal de B sur (CD) donc HB est la hauteur du trapèze ABDC.

$$\mathcal{A}=\frac{AB+CD}{2}\times HB$$

$$\mathcal{A}=\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}+\sqrt{4^2+(-4)^2}}{2}\times 3\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2\times 16}}{2}\times 3\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}==\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}=15\ cm^2$$

5. La droite Δ passant par S est orthogonale à (ABC) et coupe (ABC) en I. I est donc le projeté orthogonal de S sur (ABC). SI est une hauteur de la pyramide $SABDC$ relative à la base ABDC.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times SI$$

$$V = \frac{1}{3} \times 15 \times 2$$

$$V = 10\ cm^3$$

Le volume de la pyramide SABDC est de 10 cm^3.

> **Exercice 3**

Partie A

1. $P(I) = 0{,}057$

La probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 est 0,057.

2.a. On répète 100 fois une expérience à deux issues de manière identique et indépendante. Le succès : « la personne a déjà été infectée » a une probabilité de 0,057. La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}057$.

2.b. $E(X) = np$
$E(X) = 100 \times 0{,}057$
$E(X) = 5{,}7$
Parmi les 100 personnes, il y a en moyenne 5,7 personnes ayant déjà été infectées par le COVID19.

2.c $P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0{,}057^0 \times (1 - 0{,}057)^{100}$

$P(X = 0) = 0{,}0028$

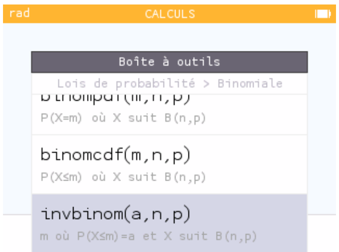
La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est de 0,0028.

2.d. On cherche $P(X \geq 2)$
$P(X \geq 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$
et
$P(X = 1) = \binom{100}{1} \times 0{,}057^1 \times (1 - 0{,}057)^{99} = 0{,}0171$
ainsi
$P(X \geq 2) = 1 - (0{,}0028 + 0.0171)$
$P(X \geq 2) = 0{,}9801$

La probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon est de 0,9801.

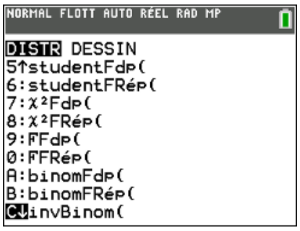
2.e. On cherche $P(X \leq n) > 0{,}9$

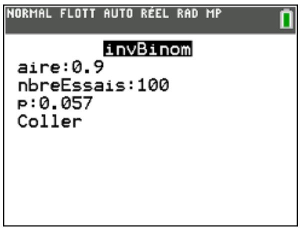
On peut utiliser les fonctionnalités de la calculatrice :
sur Numworks : Boite à outils - Probabilités – Loi de Probabilité – Binomiale :



invbinom(0.9,100,0.057) 9

sur TI : Touches 2[nde] Distrib - invBinom

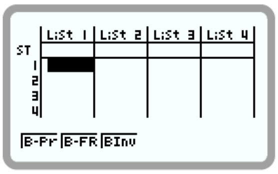


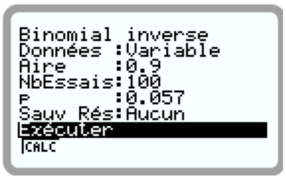


invBinom(0.9,100,0.057)
9

Sur Casio Menu Stats – PROB – BINM – BInv

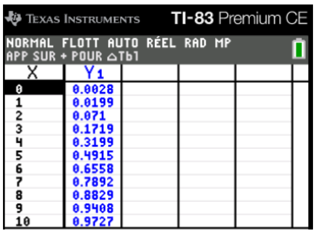
Binomial inverse
InvX=9





On vérifie $P(X \leq 9) \approx 0{,}9408 > 0{,}9$

On peut tout simplement tester plusieurs valeurs de n jusqu'à dépasser 0,9.

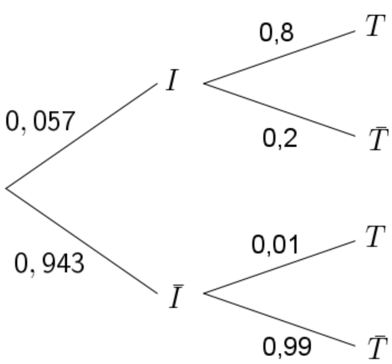


Dans le menu graphique de sa calculatrice, on saisit en guise de fonction BinomFrep(100,0.057,X) et on affiche la table de valeurs.
On retrouve X=9.

Le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0{,}9$ est $n = 9$.
Pour que la probabilité d'avoir été infecté par le covid soit supérieure à 0,9 il faut au minimum 9 personnes parmi les 100.

Partie B

1. On complète l'arbre :



2. I et $\bar{I}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T)$$
$$P(T) = P(I) \times P_I(T) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(T)$$
$$P(T) = 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01$$
$$P(T) = 0{,}05503$$

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_T(I)$:

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(I) = \frac{P(I) \times P_I(T)}{P(T)}$$

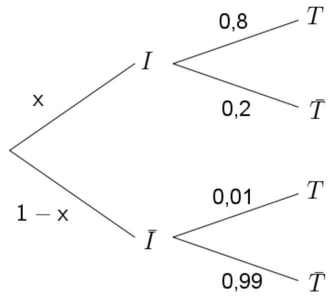
$$P_T(I) = \frac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503}$$

$$P_T(I) = 0{,}8286$$

La probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif est de 0,8286.

Partie C

On cherche $P(I)$. On pose $P(I) = x$. On a donc l'arbre de probabilités suivant et $P(T) = 0{,}2944$



D'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T)$$
$$P(T) = P(I) \times P_I(T) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(T)$$
$$0{,}2944 = x \times 0{,}8 + (1 - x) \times 0{,}01$$
$$0{,}2944 = 0{,}79x + 0{,}01$$
$$0{,}79x = 0{,}2844$$
$$x = 0{,}36$$

La probabilité qu'une personne de ce groupe ait été infectée par le COVID19 est de 0,36.

> **Exercice 4**

1. FAUX. Le minorant n'est pas la limite.
Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n+1} + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + 1 - \frac{1}{n+1} - 1 = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1 > 0$ donc $u_n > 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} + 1 = 1$

$u_n = \frac{1}{n+1} + 1$ est décroissante et minorée par 0 mais sa limite est 1.

2. VRAI.
$\frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n + \left(\frac{3}{7}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{9}{7}\right)^n = +\infty$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{9}{7}\right)^n = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ pour $-1 < q < 1$

Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\infty$

Or $u_n \leq \frac{-9^n+3^n}{7^n}$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3. VRAI.
La boucle *for i in range(4)* fait varier i quatre fois de i = 0 à i = 3.

valeur de i		0	1	2	3
valeur de U	1	1	2	4	7

4. FAUX.
La somme des gains avec le prix A est :

$$S_A = 1000 \times 15 = 15\,000$$

Avec le prix A le gagnant touche 15 000€.

Le prix B est modélisé par une suite géométrique définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
Sa forme explicite est $u_n = 1 \times 2^{n-1}$, pour tout $n > 1$.
La somme S_B est $S_B = 1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = 32767$

Avec le prix B, le gagnant touche 32 767€

5. VRAI

Etudions le sens de variation de (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \ln(x)dx - \int_1^n \ln(x)dx$$

D'après la relation de Chasles on a :

$$v_{n+1} - v_n = \int_1^n \ln(x)dx + \int_n^{n+1} \ln(x)dx - \int_1^n \ln(x)dx$$

$$v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} \ln(x)dx$$

Or sur [1 ; +∞[, $\ln(x) \geq 0$. Donc par positivité de l'intégrale $\int_n^{n+1} \ln(x)dx \geq 0$ pour tout $n \geq 1$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite (v_n) est croissante.