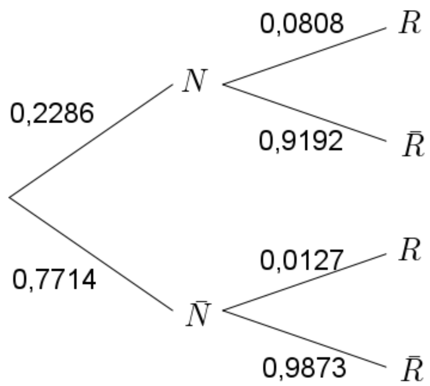
**Mathématiques : Amérique du Nord Jour 2 (22 mai 2024)**

> **Exercice 1 (5 points)**

**Partie I**

**1.**




**2.** Calculons $P(N \cap R)$ :

$$P\,(N \cap R) = P(N) \times P_N(R)$$

$$P\,(N \cap R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808$$

$$P\,(N \cap R) = 0{,}0185$$

La probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable est de **0,0185**.

**3.** $N$ et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers et $R$ est un évènement de cet univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R\,) = P(N \cap R) + P(\overline{N} \cap R)$$

$$P(R) = P(N \cap R) + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(R)$$

$$P(R) = 0{,}0185 + 0{,}7714 \times 0{,}0127$$

$$P(R) = 0{,}0283$$

La probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est **0,0283**.

**4.** Calculons $P_R(N)$ :

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)}$$

$$P_R(N) = \frac{0{,}0185}{0{,}0283}$$

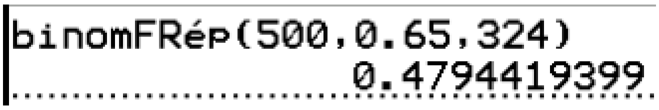
$$P_R(N) = 0{,}6527$$

La probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable est de **0,6527.**

**Partie II**

**1.** $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n = 500$ et $p = 0{,}65$.

**2.** $P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times (1 - 0{,}65)^{500-300}$




$P(X = 325) = 0{,}0374$

La probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs est de **0,0374.**

**3.** A la calculatrice Numworks :

$$P(X \geq 325) = 0{,}5206$$

A la calculatrice TI ou Casio :

$$P(X \geq 325) = 1 - P(X \leq 324)$$

Calculons $P(X \leq 324)$:

BinomFRép(500,0.65,324) = 0,4794 avec TI

BinominalCD(324,500,0.65) = 0,4794 avec Casio

Ainsi :

$$P(X \geq 325) = 1 - 0{,}4794$$

$$P(X \geq 325) = 0{,}5206$$

La probabilité de choisir au moins 325 véhicules hybrides rechargeables est de **0,5206.**

**Partie III**

**1.** $p_n = P(X = 0) = \binom{n}{0} 0{,}65^0 \times (1 - 0{,}65)^n$

$$\boldsymbol{p_n = 0{,}35^n}$$

**2.**

$q_n = P(X \geq 1)$

$q_n = 1 - P(X = 0)$

$q_n = 1 - p_n$

$q_n = 1 - 0{,}35^n$

On résout :

$$1 - 0{,}35^n \geq 0{,}9999$$

$$-0{,}35^n \geq 0{,}9999 - 1$$

$$0{,}35^n \leq 0{,}0001$$

$$\ln\,(0{,}35^n) \leq \ln\,(0{,}0001) \text{ par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$n \times \ln(0{,}35) \leq \ln 0{,}0001$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0.35)}$$

$$\boldsymbol{n \geq 9}$$

La plus petite valeur de $n$ telle que $q_n \geq 0{,}9999$ est $n = 9$.

> **Exercice 2 (5 points)**

**1.** Dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $M\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$.

**2.a.** Déterminons les coordonnées de vecteurs du plan (HMF)

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ 1 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HF}$ ne sont pas proportionnelles donc ces deux vecteurs sont non-colinéaires.

$$\overrightarrow{HM}.\vec{n} = \frac{3}{2} \times 2 + 0 \times 6 + (-1) \times 3 = 0$$
$$\overrightarrow{HF}.\vec{n} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 + 0 \times 3 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HM}$, deux vecteurs non colinéaires de (HMF) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan.

**2.b.** Une équation cartésienne du plan (HMF) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}(a, b, c)$ et H appartient à ce plan. Ainsi :

$$2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow\ 9 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -9$$

Une équation cartésienne de plan (HMF) est $2x + 6y + 3z - 9 = 0$

**2.c.** Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{m}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de $\vec{m}$ ne sont visiblement pas proportionnelles aux coordonnées de $\vec{n}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans (HMF) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

**3.** La droite (DG) est dirigée par $\overrightarrow{DG}$ et passe par D.

$$\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (DG) est :

(DG) : $\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + 1t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ soit (DG) : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$

**4.** les coordonnées de N sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2 \times 3t + 6 \times 1 + 3 \times t - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 9t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times \frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{3} \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de N sont $N\left(1\,;1\,;\frac{1}{3}\right)$.

**5.** Vérifions si le point R appartient au plan (HMF) c'est-à-dire si ces coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan.

$$2\times 3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=6+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-9$$
$$2\times 3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=6+3-9$$
$$2\times 3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=0$$

Les coordonnées du point R vérifient l'équation cartésienne de plan (HMF) donc R appartient au plan (HMF).

Vérifions si $\overrightarrow{RG}$ est colinéaire à $\vec{n}$ :

$\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}3-3\\1-\frac{1}{4}\\1-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

$\frac{0}{2}\neq\frac{\frac{3}{4}}{6}$ donc $\overrightarrow{RG}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires. Le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur (HMF).

> **Exercice 3 (6 points)**

**1.** $g$ est une fonction polynôme définie et dérivable sur [0 ;1].

$$g'(x)=2-2x$$

$$2-2x\geq 0\ \Leftrightarrow 2\geq 2x\ \Leftrightarrow x\leq 1$$

Donc, pour tout $x\in[0;1]$, $g'(x)\geq 0$ et $g$ est strictement croissante.

$$g(0)=2\times 0-0^2=0$$

$$g(1)=2\times 1-1^2=1$$

**2.** $u_1=g(u_0)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$u_2=g(u_1)=2\times\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

**3.** Soit la propriété P(n) : $0<u_n<u_{n+1}<1$.

*Initialisation :*

$u_0 = 1/2$ et $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $0 < u_0 < u_1 < 1$ . P(0) est vraie.

*Hérédité :*

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel $k$ c'est-à-dire $0 < u_k < u_{k+1} < 1$.

Montrons que $0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 1$ est vraie.

par hypothèse de récurrence on a :

$$0 < u_k < u_{k+1} < 1$$

or $u_{n+1} = g(u_n)$ et comme la fonction $g$ est croissante sur [0;1], l' ordre est conservé.

$$g(0) < g(u_k) < g(u_{k+1}) < g(1)$$

$$0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 1$$

La propriété est vraie au range $k + 1$.

*Conclusion :*

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout entier naturel $n$.

**4.** D'après la question précédente $u_n < u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)$ est croissante.

De plus $u_n < 1$. La suite $(u_n)$ est majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)$ converge.

**5.** D'après le théorème du point fixe, la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$ convergente vérifie $g(\ell) = \ell$.

$$2\ell - \ell^2 = \ell$$

$$\Leftrightarrow \ell - \ell^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(1 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \;\; ou \;\; \ell = 1$$

Comme la suite est croissante et minorée par $u_0 = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\ell = 1$.

La limite $\ell$ de la suite $(u_n)$ est 1.

**6.** $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\ln(1-u_{n+1})}{\ln(1-u_n)}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\ln(1 - 2u_n + u_n^2)}{\ln(1 - u_n)}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\ln((1-u_n)^2)}{\ln(1-u_n)}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2\ln(1-u_n)}{\ln(1-u_n)}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 2 et de terme initial $v_0 = \ln(1-\mathrm{u}_0) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

**7.** $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = -\ln(2) \times 2^n$ pour tout entier naturel $n$.

**8.**

$v_n = \ln(1-u_n)$

$\Leftrightarrow e^{v_n} = 1-u_n$

$\Leftrightarrow u_n = 1-e^{v_n}$

$\Leftrightarrow u_n = 1-e^{-ln2\times2^n}$

$\Leftrightarrow u_n = 1-e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times2^n}$

$\Leftrightarrow u_n = 1-\left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^{2^n}$

$\Leftrightarrow u_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$

$\lim\limits_{X\to+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^X = 0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ pour $0 < q < 1$

Par composé :

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 1$ par somme.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

**9.** On utilise la relation de récurrence pour calculer les termes de la suite $(u_n)$

```
def seuil :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n+1
        u=2*u-u**2
    return n
```

> **Exercice 4**

**1.** L'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses est 0. Ainsi :

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow a\ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

L'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses est $x = 1$.

**2.** $F$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions de référence définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

$$F'(x) = a\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right)$$
$$F'(x) = a(\ln(x) + 1 - 1)$$
$$F'(x) = a\ln(x)$$
$$F'(x) = f(x)$$

Donc F est une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**3.** Pour tout $x \geq 1$ $et$ $a > 0$, $\ln(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$

La fonction $f$ est continue et positive sur $[1\,;\ x_0]$ donc l'aire du domaine du plan situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est :

$$\int_1^{x_0} a\ln(x)dx$$
$$\int_1^{x_0} a\ln(x)dx = [a(x\ln(x) - x)]_1^{x_0}$$
$$\int_1^{x_0} a\ln(x)dx = a(x_0\ln(x_0) - x_0) - a(\ln(1) - 1)$$
$$\int_1^{x_0} a\ln(x)dx = a(x_0\ln(x_0) - x_0) + a$$
$$\int_1^{x_0} a\ln(x)dx = a(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1)$$

**4.** $f(x_0) = a\ln(x_0)$

Dérivons $f$ : $f'(x) = \frac{a}{x}$

Déterminons l'équation de $T$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln(x_0)$$

$$y = \frac{a}{x_0}x - a + a\ln(x_0)$$

L'ordonnée à l'origine de la droite $T$ est $-a + a\ln(x_0)$

Le point A a pour coordonnées $A(0, -a + a\ln(x_0))$

Le point B a pour coordonnées $B(0\,; a\ln(x_0))$

Ainsi $AB = \sqrt{(0-0)^2 + (a\ln(x_0) + a - a\ln(x_0)\,)^2}$

$AB = \sqrt{a^2} = |a| = a$ pour tout $a > 0$.

Donc la longueur AB est indépendante de la valeur de $x_0$ et est égale à $a$.