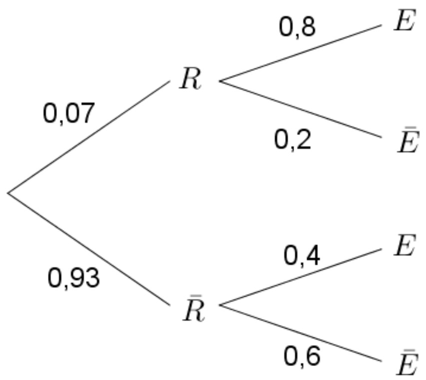
Mathématiques : Amérique du Nord Jour 1 (21 mai 2024)

> **<u>Exercice 1 (5 points)</u>**

Partie A

1.



$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = \mathbf{0,056}$

2. Déterminons $P(E)$.

R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers et E est un évènement de cet univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E)$$

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(E)$$

$$P(E) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4$$

$$P(E) = 0{,}056 + 0{,}372$$

$$\underline{P(E) = 0{,}428}$$

La probabilité de tirer une épée est des **0,428.**

3. Déterminons $P_E(R)$

$$P_E(R) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)}$$

$$P_E(R) = \frac{0{,}056}{0{,}428}$$

$$P_E(R) = 0{,}131$$

La probabilité que l'objet soit rare sachant que le joueur a tiré une épée est de **0,131.**

Partie B

1. On répète 30 fois de manière identique et indépendante une épreuve à deux issues dont le succès « l'objet est rare » a une probabilité de 0,07. La variable aléatoire X qui compte le nombre d'objets rares que le joueur obtient suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}07$.

2. $P(X < 6) = P(X \leq 5)$

A la calculatrice on obtient $P(X < 6) = 0{,}984$

3. A la calculatrice

Sur Numworks : `invbinom(0.5,30,0.07) = 2`

Sur TI : `invBinom(0.5,30,0.07) = 2`

Sur Casio : `InvBinominalCD(0.5,30,0.07) = 2`

$P(X \geq k) \geq 0.5$ pour $\boldsymbol{k = 2}$

En testant successivement des valeurs de k, on a :

Sur Numworks :

$$P(X \geq 2) = 0{,}630$$

$$P(X \geq 3) = 0{,}351$$

Ainsi $P(X \geq k) \geq 0.5$ pour $\boldsymbol{k = 2}$

Sur TI et Casio :

$P(X \geq k) \geq 0.5 \Leftrightarrow 1 - P(X < k) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow P(X \leq k - 1) \leq 0{,}5$

$$P(X \leq 1) = 0.369$$

$$P(X \leq 2) = 0.648$$

On en déduit que $k - 1 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = 2}$

La probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure ou égale à 0,5.

4. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre d'objets rares obtenus avec un ticket or. Y suit une loi binomiale de paramètres n= N et p = 0,07.

On souhaite avoir $P(Y \geq 1) \geq 0{,}95$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}95$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P(Y=0) \leq 0{,}05$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \binom{N}{0} 0{,}07^0 \times (1-0{,}07)^N \leq 0{,}05$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}93^N \leq 0{,}05$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \ln\left(0{,}93^N\right) \leq \ln\ (0{,}05)$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow N \times \ln 0{,}93\ \leq \ln 0{,}05$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}93}$$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow N \geq 42$$

Pour obtenir au moins un objet rare avec une probabilité supérieure à 0,95, il faut réaliser au moins 42 tirages.

> **<u>Exercice 2 (4 points)</u>**

1. Les systèmes a et d donnent $y = 1$ alors que $y_A = 0$. On élimine ces propositions.

Le système b donne $z = 3$ alors que $z_B = 0$. On élimine cette proposition.

La bonne réponse est la proposition **c** . Pour le point A, $t = 0$ et pour le point B , $t = 1$.

2. Pour les propositions a, b et c on a $y = 6$. Ainsi $t = 1$; On déduit de la représentation paramétrique que $x = 7$ et $z = 2$. Aucune des trois propositions a, b ou c ne convient.

La bonne réponse est la proposition **d**. On a alors $t = -\frac{3}{2}$.

3. (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. (d') est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces deux vecteurs directeurs ne sont visiblement pas proportionnelles donc les droites ne sont pas parallèles.

Vérifions s'il existe un point d'intersection.

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4t = -2+3(3-2t) \\ 6t = -1-2(3-2t) \\ 3-2t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4t = 7-6t \\ 6t = -7+4t \\ 3-2t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t = 4 \\ 2t = -7 \\ 3-2t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0{,}4 \\ t = -3{,}5 \\ 3-2t = k \end{cases}$$

Il n'existe pas de valeur unique de t solution du système donc les droites (d) et (d') ne sont pas sécantes.

La bonne réponse est la proposition **b.** Les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

4. On peut tester les coordonnées du point I dans les 4 équations de plan proposées. Seules les propositions a et b sont vérifiées. On sait de plus que $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ dirige (d). De plus, un vecteur normal au plan (P) est colinéaire à $\vec{u}$. On remarque que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$. La proposition **a** est la bonne réponse.

> Exercice 3 (5 points)

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point A.

$$f'(1) = 3$$

La droite T coupe l'axe des ordonnées en -4

Une équation de la droite T est $y = 3x - 4$

2. La tangente T traverse C_f en A.

T est au dessus de C_f sur $]0;1]$ donc f est concave sur $]0;1]$.

T est en dessous de C_f sur $[1;+\infty[$ donc f est convexe sur $[1;+\infty[$.

Le point A semble est le point d'inflexion de C_f.

Partie B : étude analytique

Etude de la limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Etude de la limite de f en 0 :

$$f(x) = xln\,(x^2) - \frac{1}{x} = 2xln(x) - \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2xln\,(x) = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

2.a Sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$

2.b. Sur $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{(x^2)^2}$ (f' est de la forme $\ln(u) + k + \frac{1}{v}$)

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1^2)}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x^3}$$

3.a. Etudions le signe de $f''(x)$:

Sur $]0\,; +\infty[$, $2(x + 1) > 0$ et $x^3 > 0$. $f''(x)$ a le même signe que $(x - 1)$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Sur $]0\,; 1]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave sur cet intervalle.

Sur $[1; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur cet intervalle.

3.b. Dressons le tableau de variations de f'

x	0		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$	3	$\nearrow$	

$f'(1) = \ln(1^2) + 2 + \frac{1}{1^2} = 3$

La fonction f' admet un minimum de 3 en $x = 1$ d'après son tableau de variations donc $f'(x)$ est strictement positive sur]0 ;+∞[.

D'après le théorème fondamental de la dérivation :

$f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4.a. D'après la question 3, f est continue est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$0 \in]-\infty\,; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

4.b. A la calculatrice on obtient $f(1{,}327) \approx -0.0027$ et $f(1{,}328) \approx 0.0004$ donc $\boldsymbol{\alpha \approx 1{,}33}$

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

> **Exercice 4 (6 points)**

1.

$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0\times x} \sin(x)\, dx$

$I_0 = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$

$I_0 = [-cox\ (x)]_0^{\pi}$

$I_0 = -\cos(\pi) + \cos(0)$

$I_0 = -(-1) + 1$

$I_0 = 2$

2.a. Pour tout entier naturel $n, e^{-nx} > 0$ et , sur [0 ; π] $\sin(x) > 0$

Ainsi sur [0 ; π] , $e^{-nx} \sin(x) > 0.$

Par positivité de l' intégrale, $I_0 > 0$ pour tout entier naturel $n.$

2.b.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} \sin(x) dx - \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x} \sin(x) - e^{-nx} \sin(x)\ )\ dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} (e^{-nx-x} \sin(x) - e^{-nx} \sin(x)\ )\ dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} (e^{-nx} \sin(x)(e^{-x} - 1) dx$$

On sait que sur [0 ; π] , $e^{-nx} \sin(x) > 0.$

On a $0 \leq x \leq \pi$

$-\pi \leq -x \leq 0$

$e^{-\pi} \leq e^{-x} \leq e^0$ (la fonction exponentielle conserve l'ordre)

$e^{-\pi} - 1 \leq e^{-x} - 1 \leq e^0 - 1$

$e^{-\pi} - 1 \leq e^{-x} - 1 \leq 0$

Ainsi $e^{-nx}\sin(x)(e^{-x}-1) \leq 0$ sur $[0\,;\,\pi]$.

Par positivité de l'intégration, on en deduit que $\int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)(e^{-x}-1) \leq 0$

donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ pour tout entier naturel n.

2.c. D'après la question 2.b la suite (I_n) est décroissante et d'après la question 2.a la suite (I_n) est minorée par 0. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (I_n) converge.

3.a

$I_n - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x) - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$

$I_n - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \int_0^{\pi} (e^{-nx}\sin(x) - e^{-nx})dx$ par linéarité de l'intégrale.

$I_n - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \int_0^{\pi} e^{-nx}\,(\sin(x) - 1)dx$

On sait que sur $[0\,;\pi]$, $e^{-nx} > 0$ et $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $-1 \leq \sin(x) - 1 \leq 0$

Ainsi, sur $[0\,;\pi]$, $e^{-nx}(\sin(x) - 1) \leq 0$

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,(\sin(x) - 1)dx \ \leq 0$$

$$I_n - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx \ \leq 0$$

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$$

3.b

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx \ = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx \ = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \left(\frac{e^0}{-n}\right)$$

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{-e^{-n\pi}}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$$

3.c

$\lim\limits_{n\to+\infty} -e^{-n\pi} = 0$ d'où par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-e^{-n\pi} = 1$ puis par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n\pi}}{n} = 0$

On sait que $0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4.a.

Première méthode :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[0\,;\pi\,]$ pour tout n ≥ 1

$u(x) = e^{-nx}$ et $v(x) = -\cos(x)$

$u'(x) = -ne^{-nx}$ $v'(x) = \sin(x) I_n = [-e^{-nx}\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} ne^{-nx}\cos(x)dx$

$$I_n = [-e^{-nx}\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} ne^{-nx}\cos(x)dx$$

$$I_n = -e^{-n\pi}\cos(\pi) + e^0\cos(0) - n\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)dx$$

$$I_n = -e^{-n\pi} + 1 - nJ_n$$

Deuxième méthode :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[0\,;\pi\,]$ pour tout n ≥ 1

$u(x) = \frac{e^{-nx}}{-n}$ et $v(x) = \sin(x)$

$u'(x) = e^{-nx}$ $v'(x) = \cos(x)$

$$I_n = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{e^{-nx}}{-n}\cos(x)\,dx$$

$$I_n = \frac{e^{-n\pi}}{-n}\sin(\pi) - \frac{e^0}{-n}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)\,dx$$

$$I_n = 0 - 0 + \frac{1}{n}J_n$$

$$I_n = \frac{1}{n}J_n$$

4.b. Des deux égalités précédentes on en déduit pour tout n ≥ 1 :

$$\frac{1}{n}J_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

$$\frac{1}{n}J_n + nJ_n = 1 + e^{-n\pi}$$

$$J_n\left(\frac{1}{n} + n\right) = 1 + e^{-n\pi}$$

$$\frac{J_n(1+n^2)}{n} = 1 + e^{-n\pi}$$

$$J_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{\frac{1+n^2}{n}}$$

$$J_n = \frac{n(1 + e^{-n\pi})}{1+n^2}$$

De plus $I_n = \frac{1}{n}J_n$ pour tout n ≥ 1, ainsi :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n(1 + e^{-n\pi})}{1+n^2}$$

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{1+n^2}$$

5. On utilise une boucle « tant que » pour calculer I tant que la condition désirée n'est pas remplie.

```
from math import *
def seuil() :
        n=0
        I=2
        while I >= 0,1 :
                n=n+1
                I=(1+exp(-n*pi))/(n*(n+1)
        return n
```