

A. Glisse sur plan incliné

Q.1. À l'aide du script en langage de programmation Python, nommer en justifiant les énergies correspondant à E1, E2 et E3. Attribuer ces énergies aux courbes du graphique ci-dessus (courbes a, b et c).

Lors du trajet AB le skateur perd de l'altitude son énergie potentielle de pesanteur Epp diminue, cela correspond à la courbe b.

Le skateur gagne de la vitesse, son énergie cinétique augmente, cela correspond à la courbe c.

Enfin l'énergie mécanique étant la somme de Ec + Epp, elle est représentée par la courbe a.

Q.2. Interpréter l'évolution temporelle de l'énergie E3 représentée sur le graphique ci-dessus.

L'énergie mécanique diminue au cours du temps, cette évolution est due à la force de frottement des roues qui dissipe de l'énergie sous forme de chaleur.

Q.3. Déterminer la valeur de la vitesse atteinte par le skateboarder au point B.

L'énergie cinétique est notée E1, sa valeur finale indiquée dans le script python est de 540,5 J.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 = 540,5$$

$$v_B = \sqrt{\frac{540,5 \times 2}{m}} = \sqrt{\frac{540,5 \times 2}{75,0}} = 3,80 \text{ m.s}^{-1}$$



Cette valeur est confirmée par les données de la partie B qui suit.

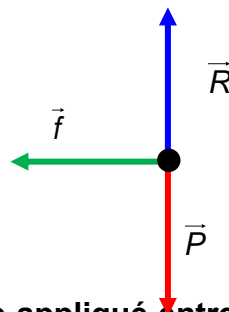
B. Phase de mouvement horizontal

Q.4. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au skateboarder et les représenter sans souci d'échelle sur la copie.

\vec{P} le poids

\vec{R} la réaction normale du sol

\vec{f} la force de frottement



Q.5. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les points B et C, établir la relation entre v_B , m , f et la distance d'arrêt BC.

$$\Sigma W(\vec{F}_{ext.}) = \Delta E_C$$

$$W_{B \rightarrow C}(\vec{P}) + W_{B \rightarrow C}(\vec{R}) + W_{B \rightarrow C}(\vec{f}) = E_C(C) - E_C(B)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{BC} + \vec{R} \cdot \vec{BC} + \vec{f} \cdot \vec{BC} = 0 - E_C(B)$$

$$\|\vec{P}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cdot \cos 90^\circ + \|\vec{R}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cdot \cos 90^\circ + \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cdot \cos 180^\circ = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$$

$$-f \cdot BC = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$$

$$BC = \frac{m \cdot v_B^2}{2f}$$

Q.6. Montrer que la distance d'arrêt BC s'exprime par la relation : $BC = \frac{v_B^2}{2 \cdot \mu_C \cdot g}$.

On a $\mu_C = \frac{f}{R}$ donc $f = \mu_C \cdot R$.

Le skateboardeur n'a pas de mouvement vertical, d'après le principe d'inertie les forces verticales se compensent alors $P = R$.

$$f = \mu_C \cdot P.$$

$$f = \mu_C \cdot m \cdot g.$$

$$BC = \frac{m \cdot v_B^2}{2 \mu_C \cdot m \cdot g}$$

$$BC = \frac{v_B^2}{2 \cdot \mu_C \cdot g}$$

Q.7. Calculer la valeur de la distance d'arrêt.

$$BC = \frac{3,8^2}{2 \times 0,040 \times 9,81} = 18 \text{ m}$$

$\frac{3,8^2}{2 \times 0,040 \times 9,81}$
18.39959225

Q.8. Indiquer en justifiant comment évolue la distance d'arrêt du skateboard suite à ce changement de roues.

Les roues sont moins dures donc les forces de frottement sont plus fortes.

La distance d'arrêt est donc réduite.

C. Étude d'un saut et photographie

Q.9. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires décrivant la trajectoire du centre de masse G du skateboardeur lors du saut.

Le système n'est soumis qu'à la force poids.

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}.$$

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

En projection selon les axes Ox et Oz du repère choisi, il vient :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ donc } a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \text{ et } a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

$$\text{Ainsi en primitivant on obtient } \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g \cdot t + Cte_2 \end{cases}$$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

$$\text{Coordonnées du vecteur vitesse initiale } \vec{v}_D : \vec{v}_D \begin{cases} v_{Dx} = v_D \cdot \cos \beta \\ v_{Dz} = v_D \cdot \sin \beta \end{cases}$$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_D = \vec{v}(t=0)$ on a :

$$v_D \cdot \cos \beta = Cte_1$$

$$v_D \cdot \sin \beta = 0 + Cte_2$$

$$\text{Finalement : } \vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_D \cdot \cos \beta \\ v_z(t) = -g \cdot t + v_D \cdot \sin \beta \end{cases}$$

À chaque instant $\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ donc $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$ et $v_y = \frac{dz(t)}{dt}$

En primitivant on obtient $\vec{OG} \begin{cases} x(t) = v_D \cdot \cos \beta \cdot t + Cte_3 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_D \cdot \sin \beta \cdot t + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à $t = 0$ s, le centre de masse est au point de coordonnées $(x_0 ; z_0)$ donc :

$$0 + Cte_3 = 0$$

$$0 + 0 + Cte_4 = z_0$$

Finalement, on obtient les équations horaires $\vec{OG} \begin{cases} x(t) = v_D \cdot \cos \beta \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_D \cdot \sin \beta \cdot t + z_0 \end{cases}$

Q.10. Montrer que l'équation de la trajectoire du centre de masse G s'écrit sous la forme :

$$z(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_D^2 \cdot \cos^2(\beta)} \cdot x^2 + (\tan \beta) \cdot x + z_0.$$

$$t = \frac{x(t)}{v_D \cdot \cos \beta}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_D \cdot \cos \beta} \right)^2 + v_D \cdot \sin \beta \cdot \frac{x}{v_D \cdot \cos \beta} + z_0$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_D^2 \cdot \cos^2 \beta} + \tan \beta \cdot x + z_0$$

L'équation de la trajectoire est modélisée par l'équation suivante, x et z étant exprimées en m : $z(x) = -0,894 x^2 + 1,22 x + 0,80$

Q.11. Calculer la valeur de la coordonnée x du centre de masse lorsque le skateboarder retrouve l'altitude initiale $z = z_0$.

$$z_0 = 0,80 \text{ m}$$

$$0,80 = -0,894 x^2 + 1,22 x + 0,80$$

$$-0,894 x^2 + 1,22 x = 0$$

$$x \cdot (-0,894 \cdot x + 1,22) = 0$$

Cette équation est vérifiée pour $x = 0$ solution que l'on ne retient pas

$$\text{et pour } (-0,894 \cdot x + 1,22) = 0$$

$$0,894 x = 1,22$$

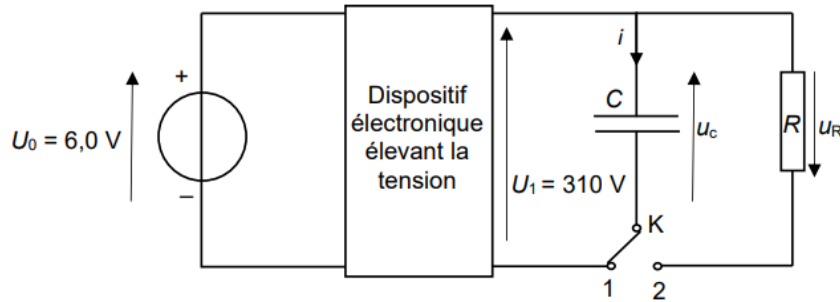
$$x = \frac{1,22}{0,894} = 1,36 \text{ m}$$

Q.12. En déduire si le skateboarder franchira ou pas l'obstacle.

Lorsque le centre de masse du skateboarder retrouve son altitude initiale alors le skate touche le sol.

Pour franchir l'obstacle, il faudrait que $x > \ell + L$, or $x = 1,36 \text{ m}$ et $\ell + L = 0,70 + 1,0 = 1,7 \text{ m}$.

L'obstacle n'est pas franchi.



Q.13. Montrer que l'équation différentielle modélisant l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur lors de sa décharge peut s'écrire : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_c = 0$ où τ est une constante.

D'après la loi des mailles :

$$0 = u_R + u_c$$

Citer les lois utilisées.

D'après la loi d'Ohm $u_R = R \cdot i$.

$$0 = R \cdot i + u_c$$

Par définition $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, or $q(t) = C \cdot u_c(t)$ avec C constante ainsi $i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$.

$$0 = R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t).$$

On divise par $R \cdot C$.

$$0 = \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_c(t)$$

En posant $R \cdot C = \tau$, on obtient $0 = \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_c(t)$.

Q.14. Vérifier que l'équation différentielle admet une solution de la forme $u_c(t) = A \cdot e^{-t/B}$. Exprimer les constantes A et B en fonction de paramètres du circuit électrique.

On remplace u_c par l'expression proposée dans l'équation différentielle,

$$0 = \frac{d(A \cdot e^{-t/B})}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot A \cdot e^{-t/B}$$

$$0 = -\frac{A}{B} e^{-t/B} + \frac{1}{\tau} \cdot A \cdot e^{-t/B}$$

$$\frac{A}{B} e^{-t/B} = \frac{1}{\tau} \cdot A \cdot e^{-t/B}$$

Pour que l'égalité soit vérifiée il faut que $\tau = B$.

Déterminons A .

$$u_c(t=0) = A \cdot e^{-0/\tau} = A$$

Or à la date $t = 0$, $u_c = U_1$.

Donc $A = U_1$.

$$u_c(t) = U_1 \cdot e^{-t/\tau}$$

Q.15. Montrer que la constante τ est homogène à un temps.

D'après Q.13., on a $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$, soit $[i] = [C] \cdot \frac{[U]}{[T]}$ donc $[C] = \frac{[i] \cdot [T]}{[U]}$

D'après la loi d'Ohm, $u_R = R \cdot i$ soit $[U] = [R] \cdot [i]$ donc $[R] = \frac{[U]}{[i]}$

$$[\tau] = [R \cdot C] = [R] \cdot [C]$$

$$[\tau] = \frac{[U]}{[i]} \cdot \frac{[i] \cdot [T]}{[U]} = [T] \text{ la constante de temps est homogène à une durée.}$$