

Q1. Système {Crapaud} de masse m et de centre de masse G
Référentiel terrestre supposé galiléen.

Repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes Ox et Oz.

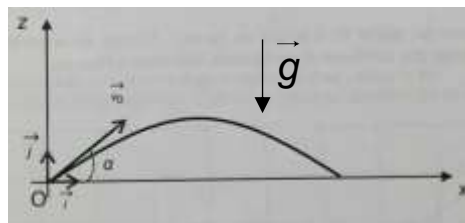
Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

Actions de l'air négligées.

Deuxième loi de Newton : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$ soit $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$ d'où $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$ donc $\boxed{\vec{a}_G = \vec{g}}$

En projection selon les axes Ox et Oz du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur

\vec{g} il vient : $\boxed{\vec{a}_G \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}}$



Q2. $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$ donc $a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$ et $a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = -g$

Ainsi en primitivant on obtient : $\vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_z(t) = -g \cdot t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_{0z} = v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$

Comme $\vec{v}_G(t=0) = \vec{v}_0$ il vient : $\begin{cases} Cte_1 = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ 0 + Cte_2 = v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$

Et finalement : $\boxed{\vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_z(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}}$

Q3. $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ donc $v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cdot \cos(\alpha)$ et $v_z = \frac{dz(t)}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha)$

Ainsi en primitivant on obtient : $\vec{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + Cte_3 \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + Cte_4 \end{cases}$

Comme $\vec{OG}(t=0) = \vec{0}$ il vient : $\begin{cases} 0 + Cte_3 = 0 \\ 0 + 0 + Cte_4 = 0 \end{cases}$

Et finalement : $\boxed{\vec{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases}}$

Q4. Lorsque le crapaud finit son saut $z(t_{\text{saut}}) = 0$ soit : $-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{saut}}^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t_{\text{saut}} = 0$.

Soit $\left(-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{saut}} + v_0 \cdot \sin(\alpha)\right) t_{\text{saut}} = 0$. En éliminant la solution $t_{\text{saut}} = 0$ s il vient :

$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{saut}} + v_0 \cdot \sin(\alpha) = 0$ soit $\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{saut}} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$ et finalement : $\boxed{t_{\text{saut}} = \frac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}}$

Q5. On reporte l'expression de t_{saut} dans $x(t)$: $x(t_{\text{saut}}) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t_{\text{saut}} = d$.

$$v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} = d \text{ soit } 2v_0^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = g \cdot d \text{ donc } v_0^2 = \frac{g \cdot d}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}$$

Et finalement, en ne gardant que la solution positive :

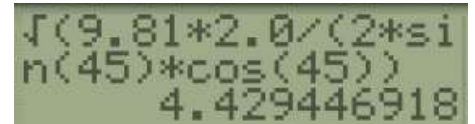
$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot d}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}}$$

Q6. Taille moyenne d'un crapaud : 10 cm.

Les crapauds peuvent faire des sauts jusqu'à 20 fois leur taille, ainsi :

$$d = 20 \times 10 \text{ cm} = 2,0 \times 10^2 \text{ cm} = 2,0 \text{ m.}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \times 2,0}{2 \times \sin(45) \times \cos(45)}} = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Q7. Le crapaud réalise un saut vertical avec $\alpha = 90^\circ$ donc $\sin(90) = 1,0$.

Pour $t = t_{\text{max}}$ le crapaud atteint l'altitude maximale z_{max} pour laquelle $v_z(t_{\text{max}}) = 0$.

$$\text{Soit } v_z(t_{\text{max}}) = -g \cdot t_{\text{max}} + v_0 \cdot \sin(90) = 0 \text{ soit } -g \cdot t_{\text{max}} + v_0 = 0 \text{ et } t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}.$$

L'expression $z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t$ permet alors de calculer z_{max} :

$$z_{\text{max}} = z(t_{\text{max}}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{max}}^2 + v_0 \cdot \sin(90) \cdot t_{\text{max}}$$

$$\text{soit } z_{\text{max}} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{max}}^2 + v_0 \cdot t_{\text{max}}$$

$$\text{d'où : } z_{\text{max}} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g}$$

$$\text{Et : } z_{\text{max}} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} + \frac{v_0^2}{g}$$

$$z_{\text{max}} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} \text{ finalement : } z_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Autre méthode : la seule force qui intervient est le poids, il s'agit d'une force conservative. L'énergie mécanique du crapaud est conservée entre le point O et le sommet S de la trajectoire.

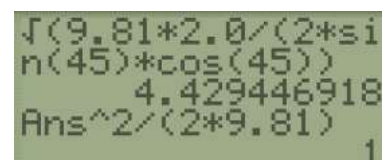
$$\begin{aligned} E_M(O) &= E_M(S) \\ E_C(O) + E_{PP}(O) &= E_C(S) + E_{PP}(S) \\ \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_O &= \frac{1}{2} m v_S^2 + m g z_{\text{max}} \end{aligned}$$

Or $z_O = 0 \text{ m}$ et au sommet S de la trajectoire $v_S = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g z_{\text{max}}$$

$$\text{D'où : } v_0^2 = 2 g z_{\text{max}} \text{ et finalement : } z_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Q8. On a : $H_{\text{champion}} = \frac{v_0^2}{2g}$ donc $H_{\text{champion}} = \frac{4,429...^2}{2 \times 9,81} = 1,0 \text{ m.}$



Q9. Les barrières mesurent 50 à 60 cm de haut : elles ont donc une hauteur nettement inférieure à 1,0 m.

Lorsque le saut du crapaud n'est pas vertical mais oblique, l'altitude maximale atteinte par le crapaud est inférieure à 1,0 m.

Par ailleurs, seuls les crapauds les plus puissants peuvent atteindre 1,0 m de haut ce qui n'est pas le cas de tous les crapauds.