

Partie A : Étude énergétique d'un tir vertical

A.1. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(0)$ de la flèche à $t = 0$ en fonction de h , m , g et v_0 .

$$E_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

A.2. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(t_H)$ de la flèche à $t = t_H$ en fonction de m , g et H .

$$E_m(t_H) = mgH$$

A.3. En déduire que $H = h + \frac{v_0^2}{2g}$.

Tous les frottements étant négligés, l'énergie mécanique se conserve donc :

$$E_m(0) = E_m(t_H)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = mgH$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh = gH$$

$$H = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

A.4.1. Calculer H en vous appuyant sur la question A.3.

$$H = \frac{25^2}{2 \times 9,81} + 1,80 = 33,7 \text{ m.}$$

$\frac{25^2}{2 \times 9,81} + 1,80$
33.65524975

A.4.2. Évaluer $u(H)$ sachant que $u(h) = 0,01 \text{ m}$, puis donner un encadrement de la valeur de H .

$$u(H) = \sqrt{(u(h))^2 + \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 (u(v_0))^2}$$

$\sqrt{0,01^2 + \left(\frac{25}{9,81}\right)^2 \times 0,5^2}$
1.274249229

$$u(H) = \sqrt{0,01^2 + \left(\frac{25}{9,81}\right)^2 (0,5)^2} = 2 \text{ m en majorant à 1 chiffre significatif.}$$

$$\text{donc } 31,7 \text{ m} \leq H \leq 35,7 \text{ m.}$$

A.4.3. Indiquer si la flèche dépasse le haut de la perche. Justifier.

En tenant compte des incertitudes sur h et H : $31,7 \text{ m} \leq H \leq 35,7 \text{ m}$ donc la flèche dépasse le haut de la perche située à 30 m.

Partie B : Étude de la trajectoire de la flèche lors d'un tir visant le mat

B.1. Établir le bilan des forces s'exerçant sur la flèche.

Tous les frottements étant négligés, la flèche n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

B.2. En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération \vec{a} de la flèche.

On étudie le mouvement de la flèche, modélisée par un point matériel F de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen associé au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy.

La deuxième de Newton donne : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}$ soit $m\vec{g} = m\vec{a}$ donc $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

D'où : $\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$

B.3. Montrer que les équations horaires du mouvement de F ont pour expression :

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + h$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{donc} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \quad \text{en primitivant} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = Cte1 \\ v_y = -gt + Cte2 \end{cases}$$

Initialement : $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ donc $\begin{cases} Cte1 = v_0 \cos \alpha \\ 0 + Cte2 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$ d'où : $\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OF}}{dt} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{en primitivant} \quad \vec{OF} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + Cte'1 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + Cte'2 \end{cases}$$

Initialement : $\vec{OF}(t=0) = h\vec{j}$ donc $\begin{cases} 0 + Cte'1 = 0 \\ -0 + 0 + Cte'2 = h \end{cases}$ $\vec{OF} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h \end{cases}$

B.4. Montrer que l'équation de la trajectoire $y(x)$ de F peut s'écrire :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha)x + h$$

On isole t de $x(t)$ et on reporte dans $y(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + h$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + \tan \alpha \cdot x + h}$$

B.5. Indiquer, en justifiant, si le tir de l'archer peut lui permettre de marquer des points. Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter sa démarche. Toute démarche, même non aboutie, sera valorisée.

Le tir de l'archer peut lui permettre de marquer des points si pour $x = D$, $25 \text{ m} \leq y(D) \leq 30 \text{ m}$.

$$y(D) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{D}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + \tan \alpha \cdot D + h$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} * 9.81 * \left(\frac{5}{25 * \cos(80)} \right)^2 + \tan(80) * 5 + 1.80 = 23.64974266}$$

$$y(D) = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times \left(\frac{5.0}{25 \times \cos 80} \right)^2 + \tan 80 \times 5.0 + 1.80 = 24 \text{ m.}$$

(ATTENTION : calculatrice en degrés, pas en radians)

Le tir de l'archer ne lui permet pas de marquer des points car $y(D) \leq 25 \text{ m}$.

Merci de nous signaler d'éventuelles erreurs : labolycee@labolycee.org