

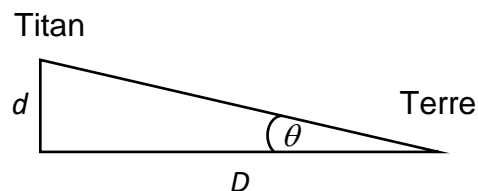
EXERCICE I : AUTOUR DE SATURNE (11 pts)

Partie A – Observation de Titan à l'œil nu

Q1. Dans l'approximation des petits angles : $\tan \theta \approx \theta = \frac{d}{D}$.

$$\theta = \frac{5,2 \times 10^3 \text{ km}}{1,43 \times 10^9 \text{ km}} = 3,6 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

$$\frac{5.2E3}{1.43E9} = 3.636363636E-6$$



Q2. Comme $\theta < \varepsilon = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$, Titan n'est pas observable à l'œil nu.

Q3. Le grossissement G d'un instrument est : $G = \frac{\theta'}{\theta}$

avec θ et θ' respectivement les angles sous lesquels l'objet est vu à l'œil nu et à travers un instrument d'optique.

Le grossissement minimal G_{\min} correspond au cas où $\theta' = \varepsilon = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ donc : $G_{\min} = \frac{\varepsilon}{\theta}$

soit $G_{\min} = \frac{3 \times 10^{-4} \text{ rad}}{3,6 \times 10^{-6} \text{ rad}} = 83$ soit 1×10^2 en ne conservant qu'un seul chiffre significatif.

Partie B – Observation de Titan à l'aide d'un instrument astronomique

Q4. L'objectif est la lentille située du côté de l'objet à observer : il s'agit de la lentille L_1 .

L'oculaire est la lentille située du côté de l'œil : il s'agit de la lentille L_2 .

La lunette étant afocale, le foyer objet F_2 de L_2 est confondu avec le foyer image F'_1 de L_1 .

Par ailleurs, F_2 et F'_2 sont symétriques par rapport au centre optique O_2 de L_2 .

Voir ANNEXE en fin de corrigé.

Q5. Marche des rayons lumineux issus de B_∞ et construction de l'image intermédiaire B_1 .

Voir ANNEXE en fin de corrigé

Explications (non demandées) : L'objet B_∞ étant à l'infini, l'image intermédiaire B_1 se forme dans le plan focal image de la lentille L_1 passant par F'_1 .

Les rayons entrants dans la lentille L_1 sont parallèles entre eux : ils émergent tous par le point image intermédiaire B_1 .

Les rayons issus de l'image intermédiaire B_1 , située dans le plan focal objet de la lentille L_2 , ressortent tous parallèles entre eux.

Q6. Par définition du grossissement de la lunette : $G = \frac{\theta'}{\theta}$

Dans le triangle $O_1 F'_1 B_1$: $\tan \theta = \frac{F'_1 B_1}{O_1 F'_1} = \frac{F'_1 B_1}{f'_{ob}} \approx \theta$ (approximation des petits angles).

Dans le triangle $O_2 F'_1 B_1$: $\tan \theta' = \frac{F'_1 B_1}{O_2 F'_1} = \frac{F'_1 B_1}{f'_{oc}} \approx \theta'$ (approximation des petits angles).

$$\text{Ainsi, } G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{F'_1 B_1}{f'_{oc}} \times \frac{f'_{ob}}{F'_1 B_1} = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}}.$$

Q7. La distance focale f'_{ob} étant fixée à 3,10 m, le grossissement maximal s'obtient avec la distance focale de l'oculaire la plus petite soit $f'_{oc} = 12 \text{ mm}$.

Q8. $G_{\max} = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc,\min}}$ donc $\theta' = \frac{f'_{ob} \cdot \theta}{f'_{oc,\min}}$.

$$\frac{3.1E3 \times 3.6E-6}{12} = 9.3E-4$$

$$\frac{3.1E3 \times 1.3E-7}{12} = 3.358333333E-5$$

Pour Titan : $\theta'_T = \frac{f'_{ob} \cdot \theta_T}{f'_{oc,\min}}$ soit $\theta'_T = \frac{3,1 \times 10^3 \times 3,6 \times 10^{-6}}{12} = 9,3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ (distances focales en mm)

Pour Janus : $\theta'_J = \frac{f'_{ob} \cdot \theta_J}{f'_{oc}}$ soit $\theta'_J = \frac{3,1 \times 10^3 \times 1,3 \times 10^{-7}}{12} = 3,3 \times 10^{-5} \text{ rad}$

On a donc : $\theta'_T > \varepsilon = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ mais $\theta'_J < \varepsilon$.

On peut observer Titan à travers la lunette astronomique de Marseille mais pas Janus.

- Q9.** La lunette étant afocale : $O_1O_2 = f'_{ob} + f'_{oc}$.
 Avec l'oculaire de plus grande distance focale $f'_{oc} = 40 \text{ mm}$ il vient :
 $O_1O_2 = 3,1 \times 10^3 + 40 \text{ mm} = 3,140 \times 10^3 \text{ mm} \approx 3,1 \times 10^3 \text{ mm} = 3,1 \text{ m}$.
 La longueur L de la lunette est voisine de la distance focale f'_{ob} soit environ 3,1 m.

Partie C – Limites d'observation de la lunette astronomique

- Q10.** Le phénomène qui limite le pouvoir de résolution de la lunette est la **diffraction de la lumière par l'objectif**.

- Q11.** Il faut comparer θ' à α .

Pour Titan observé avec un grossissement $G = 260$: $\theta' = G \times \theta$ avec $\theta = 3,6 \times 10^{-6} \text{ rad}$ (**Q1.**)
 Soit $\theta' = 260 \times 3,6 \times 10^{-6} \text{ rad} = 9,4 \times 10^{-4} \text{ rad}$.

Pour $\lambda = 550 \text{ nm} = 550 \times 10^{-9} \text{ m}$ et $d_{ob} = 260 \text{ mm} = 2,60 \times 10^{-1} \text{ m}$, $\alpha = \frac{1,22 \times \lambda}{d_{ob}}$

Soit $\alpha = \frac{1,22 \times 550 \times 10^{-9} \text{ m}}{2,60 \times 10^{-1} \text{ m}} \text{ rad} = 2,6 \times 10^{-6} \text{ rad}$.

Comme $\theta' > \alpha$ alors les deux points A et B des pôles de Titan peuvent être séparés et la lunette permet d'observer Titan correctement.

- Q12.** Pour une longueur d'onde λ donnée, le pouvoir de résolution α est d'autant plus petit que le diamètre de l'objectif est grand. C'est la raison pour laquelle il est préférable d'utiliser un objectif ayant un grand diamètre d'ouverture.

Partie D – Autour de Saturne

- Q13.** Système : {Satellite} de masse m .

Référentiel : saturnocentrique considéré galiléen.

Inventaire des forces : uniquement la force d'attraction gravitationnelle exercée par Saturne

sur le satellite : $\vec{F}_{S/T} = G \cdot \frac{m \cdot M_s}{r^2} \cdot \vec{u}_n$

Deuxième loi de Newton ($\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$) : $\vec{F}_{S/T} = m \cdot \vec{a}$ donc $G \cdot \frac{m \cdot M_s}{r^2} \cdot \vec{u}_n = m \cdot \vec{a}$

soit $\vec{a} = \frac{G \cdot M_s}{r^2} \cdot \vec{u}_n$

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\tau$.

En comparant deux expressions de \vec{a} , on en déduit que :

- selon \vec{u}_τ : $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $v = \text{constante}$: le mouvement du satellite est uniforme.

- selon \vec{u}_n : $\frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_s}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_s}{r}$ soit $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{r}}$

Q14. La vitesse du satellite étant constante, on peut écrire : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ pour une révolution.

Donc $T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_s}{r}}}$ d'après la question **Q13**.

Soit : $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{\frac{G \cdot M_s}{r}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_s}$ donc $T^2 = k \cdot r^3$ avec $k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$.

On retrouve bien la troisième loi de Kepler avec k une constante.

Q15. Pour Janus : $T_J^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R_J^3}{G \cdot M_s}$ donc $M_s = \frac{4\pi^2 \cdot R_J^3}{G \cdot T_J^2}$

avec $T_J = 17 \text{ h} = 17 \times 3600 \text{ s}$ et $R_J = 1,51 \times 10^5 \text{ km} = 1,51 \times 10^8 \text{ m}$.

$M_s = \frac{4\pi^2 \times (1,51 \times 10^8)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (17 \times 3600)^2} \text{ kg} = 5,4 \times 10^{26} \text{ kg}.$

```
4*pi^2*(1.51E8)^3/
(6.67E-11*(17*36
00)^2)
5.440789208E26
```

Q16. La vitesse v d'un satellite dépend de sa distance r au centre de Saturne : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_s}{r}}$.

Les corps du premier anneau ont un rayon r qui varie entre r_{int} et r_{ext} .

Ils ont donc des vitesses différentes ($v_{\text{int}} > v_{\text{ext}}$) et ne tournent donc pas à la même vitesse autour de Saturne.

Q17. Comparons la période de révolution T_{ext} d'un corps sur le rayon extérieur R_{ext} du dernier anneau à celle T_{int} d'un corps sur le rayon intérieur r_{int} du premier anneau :

$\frac{T_{\text{ext}}^2}{T_{\text{int}}^2} = \frac{\frac{4\pi^2 \cdot R_{\text{ext}}^3}{G \cdot M_s}}{\frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{int}}^3}{G \cdot M_s}} = \frac{R_{\text{ext}}^3}{r_{\text{int}}^3}$ soit $\left(\frac{T_{\text{ext}}}{T_{\text{int}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}}\right)^3$ donc $\frac{T_{\text{ext}}}{T_{\text{int}}} = \left(\frac{R_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

$\frac{T_{\text{ext}}}{T_{\text{int}}} = \left(\frac{1,36 \times 10^5 \text{ km}}{6,69 \times 10^4 \text{ km}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2,9$ soit $T_{\text{ext}} = 2,9 \times T_{\text{int}} \approx 3 T_{\text{int}}$.

```
(1.36E5/6.69E4)^
1.5
2.898472511
```

La période de révolution d'un corps sur le rayon extérieur du dernier anneau est environ égale à trois fois celle d'un corps sur le rayon intérieur du premier anneau.

Ainsi la bordure interne du premier anneau effectue environ 3 tours pendant que la bordure externe du dernier anneau réalise un tour complet.

ANNEXE Questions Q4.

