

# EXERCICE I - MOUVEMENT D'UNE GOUTTE D'ENCRE DANS UNE IMPRIMANTE À JET D'ENCRE (11 points)

## PARTIE A : Modèle du condensateur plan

### A.1. Donner l'unité de la capacité d'un condensateur dans le système international (SI).

La capacité  $C$  s'exprime en farads (F).

### A.2. Montrer que les graphiques présentés en figures 4 et 5 respectent la relation 1.

La figure 4 montre que la représentation graphique de  $C$  en fonction de  $S$  est une droite. On ne voit pas si elle passe ou non par l'origine.

L'équation de la droite est du type  $C = a.S + b$

Le coefficient directeur de la droite est donné, il vaut  $a = 1,76 \times 10^{-9}$  SI

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $b$ , on choisit un point sur la droite ( $S = 4,0 \times 10^{-4}$ ;  $C = 7 \times 10^{-13}$ ).

$$C = a.S + b$$

$$\text{donc } b = C - a.S$$

$$b = 7 \times 10^{-13} - 1,76 \times 10^{-9} \times 4,0 \times 10^{-4} = -4 \times 10^{-15} = -0,04 \times 10^{-13} \text{ SI}$$

On peut considérer que  $b$  est suffisamment proche de zéro pour modéliser la droite par une fonction linéaire.

On vérifie bien que  $C$  est proportionnelle à  $S$ .

De même avec la figure 5.

La figure 5 montre que la représentation graphique de  $C$  en fonction de  $\frac{1}{d}$  est une droite. On ne voit pas si elle passe ou non par l'origine.

L'équation de la droite est du type  $C = a.\frac{1}{d} + b$

Le coefficient directeur de la droite est donné, il vaut  $a = 1,7 \times 10^{-15}$  SI

Pour trouver l'ordonnée à l'origine  $b$ , on choisit un point sur la droite ( $\frac{1}{d} = 500$ ;  $C = 8,9 \times 10^{-13}$ ).

$$C = a.\frac{1}{d} + b$$

$$\text{donc } b = C - a.\frac{1}{d}$$

$$b = 8,9 \times 10^{-13} - 1,7 \times 10^{-15} \times 500 = 4 \times 10^{-14} = 0,4 \times 10^{-13} \text{ SI}$$

Cette fois, on ne peut pas considérer que  $b$  est suffisamment proche de zéro pour modéliser la droite par une fonction linéaire. Il s'agit d'une fonction affine.

Donc on ne vérifie pas que  $C$  est proportionnelle à  $\frac{1}{d}$ .

## PARTIE B : Mouvement d'une goutte d'encre électriquement chargée

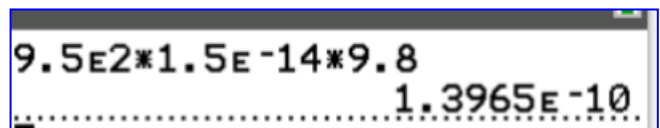
### B.1. Trajectoire d'une goutte d'encre électriquement chargée dans un champ électrique uniforme

#### B.1.1. Vérifier quantitativement que l'hypothèse de négliger le poids de la goutte devant la force électrostatique est justifiée.

$$P = m.g$$

$$P = \rho.V.g$$

$$P = 9,5 \times 10^2 \times 1,5 \times 10^{-14} \times 9,8 = 1,4 \times 10^{-10} \text{ N}$$



$$9.5E2 * 1.5E-14 * 9.8 = 1.3965E-10$$

$$F_e = q.E$$

$$F_e = q.\frac{U}{d}$$

$$F_e = 2,0 \times 10^{-13} \times \frac{3,0 \times 10^3}{5,0 \times 10^{-3}} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ N}$$

(On ne tient pas compte du signe négatif de  $q$  pour calculer la norme de  $F_e$ .)

$$\frac{F_e}{P} = \frac{1,2 \times 10^{-7}}{1,3965 \times 10^{-10}} = 8,6 \times 10^2 \text{ ou } F_e = 8,6 \times 10^2 \cdot P$$

La force électrostatique est près de 900 fois plus grande que la force poids, l'hypothèse est vérifiée.

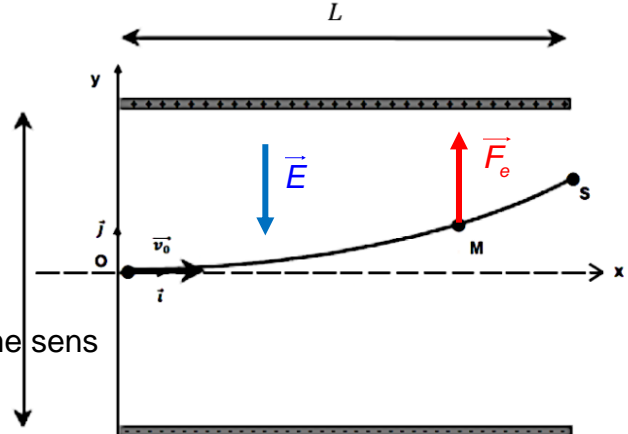
**B.1.2. Compléter le schéma de l'ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE (page 13/13) en représentant sans souci d'échelle le champ électrostatique  $\vec{E}$  et la force électrostatique  $\vec{F}_e$  que subit la goutte d'encre au point M. Justifier l'orientation de chacun des vecteurs.**

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est orienté vers la plaque chargée négativement.

Justification :

On sait qu'une particule de charge positive est attirée vers la plaque chargée négativement. Elle subit une force électrostatique vers le bas.

Et  $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ , avec  $q > 0$  alors  $\vec{F}_e$  et  $\vec{E}$  ont le même sens



La force électrique est orientée vers la plaque chargée positivement

$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ , avec  $q < 0$  alors  $\vec{F}_e$  et  $\vec{E}$  sont de sens opposés.

**B.1.3. Déterminer la valeur de la capacité  $C$  du condensateur plan de charge  $q_c$  soumis à la tension électrique  $U$ .**

$$q_c = C \cdot U$$

$$C = \frac{q_c}{U}$$

$$C = \frac{1,0 \times 10^{-9}}{3,0 \times 10^3} = 3,3 \times 10^{-13} \text{ F}$$

**B.1.4.1. Établir les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement de la goutte d'encre.**

Système : {goutte d'encre}

Référentiel terrestre supposé galiléen

On applique la deuxième loi de Newton,  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext.}} = m \cdot \vec{a}$

La force électrostatique prédomine sur les autres forces, alors  $\vec{F}_e = m \cdot \vec{a}$ .

$$q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

En projection selon les axes Ox et Oy du repère choisi et compte tenu du sens du vecteur  $\vec{E}$  indiqué sur le schéma et du signe négatif de  $q$  il vient :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m} \cdot E > 0 \end{cases}, \text{ alors } \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} > 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ donc } a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \text{ et } a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

Ainsi en primitivant on obtient  $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t + Cte_2 \end{cases}$

On détermine les constantes avec les conditions initiales.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0 : \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$  on a :

$$v_0 = Cte_1$$

$$0 = 0 + Cte_2$$

Finalement :  $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t \end{cases}$

À chaque instant  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  donc  $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$  et  $v_y = \frac{dy(t)}{dt}$

En primitivant on obtient  $\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t + Cte_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t^2 + Cte_4 \end{cases}$

Conditions initiales, à  $t = 0$  s, la goutte est au point de coordonnées  $O(x(0) = 0; y(0) = 0)$  donc :

$$0 = 0 + Cte_3$$

$$0 = 0 + 0 + Cte_4$$

Finalement, on obtient les équations horaires  $\vec{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t^2 \end{cases}$

**B.1.4.2. En déduire que la trajectoire de la goutte d'encre au sein du condensateur plan**

**s'écrit :**  $y(x) = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2$ .

$$t = \frac{x(t)}{v_0}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \left( \frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$y(x) = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

**B.1.4.3. Donner alors l'expression de l'ordonnée  $y_s$  de la goutte à la sortie S du condensateur.**

À la sortie du condensateur,  $x = L$ .

$$y_s = -\frac{q \cdot U}{2m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot L^2$$

## B.2. Impact de la goutte d'encre sur la feuille

### B.2.1. Justifier que la goutte suit un mouvement rectiligne uniforme entre le condensateur plan et la feuille.

D'après la première loi de Newton (principe d'inertie), si  $\Sigma \vec{F}_{ext.} = \vec{0}$  alors  $\vec{v} = \vec{Cte}$ , le mouvement est rectiligne et uniforme.

### B.2.2.1. Exprimer $\tan \alpha$ en fonction de O'Y et O'I d'une part et en fonction de SH et HI d'autre part.

$$\tan \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{O'Y}{O'I} = \frac{SH}{HI}$$

### B.2.2.2. En déduire que l'ordonnée Y du point d'impact de la goutte d'encre sur la feuille a pour expression : $Y = -\frac{q.U.L}{m.d.v_0^2} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right)$ .

$$\frac{O'Y}{O'I} = \frac{Y}{\frac{L}{2} + D}$$

$$\frac{SH}{HI} = \frac{y_s}{\frac{L}{2}}$$

$$\frac{Y}{\frac{L}{2} + D} = \frac{y_s}{\frac{L}{2}}$$

$$Y = \frac{-\frac{q.U}{2m.d.v_0^2} \cdot L^2}{\frac{L}{2}} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right) = -\frac{q.U}{2m.d.v_0^2} \cdot L^2 \cdot \frac{2}{L} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right) = -\frac{q.U.L}{m.d.v_0^2} \cdot \left(\frac{L}{2} + D\right)$$

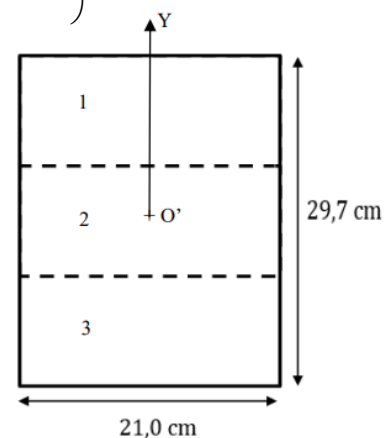
### B.2.2.3. Déterminer dans quelle zone de la feuille, c'est-à-dire zone 1, 2 ou 3 de la figure 8, la goutte va se déposer.

On calcule Y.

$$Y = -\frac{-2,0 \times 10^{-13} \times 3,0 \times 10^3 \times 20 \times 10^{-3}}{9,5 \times 10^2 \times 1,5 \times 10^{-14} \times 5,0 \times 10^{-3} \times 30^2} \times \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} + 10 \times 10^{-3}\right)$$

$$Y = 3,7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{-2E-13 * 3E3 * 20E-3}{9.5E2 * 1.5E-14 * 5E-3 * 30^2} * \left(\frac{20E-3}{2} + 10E-3\right) = 3.74269006E-3$$



**Figure 8 :** Les différentes zones d'une feuille A4 (les trois zones sont de même dimension)

La goutte atteint la feuille tout près de O' donc dans la zone 2.