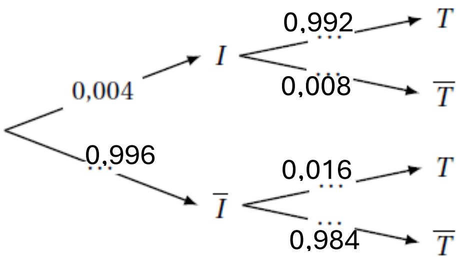
Baccalauréat Métropole et La Réunion – 12 septembre 2023

Exercice 1

Partie A

1.



2. a. On calcule $p(\bar{I} \cap \bar{T})$
$p(\bar{I} \cap \bar{T}) = p(\bar{I}) \times p_{\bar{I}}(\bar{T})$
$p(\bar{I} \cap \bar{T}) = 0{,}996 \times 0{,}984$
$p(\bar{I} \cap \bar{T}) = 0{,}980$
La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est de 0,980.

b. Les évènements I et $\bar{I}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$p(T) = p(I \cap T) + p(\bar{I} \cap T)$
$p(T) = p(I) \times p_I(T) + p(\bar{I}) \times p_{\bar{I}}(T)$
$p(T) = 0{,}004 \times 0{,}992 + 0{,}996 \times 0{,}016$
$p(T) = 0{,}020$ (valeur arrondies par excès à 10^{-3} près).
La probabilité que la vache présente un test positif est de 0,020.

c. On calcule $p_T(I)$:
$p_T(I) = \frac{p(I \cap T)}{p(T)}$
$p_T(I) = \frac{0{,}004 \times 0{,}992}{0{,}020}$
$p_T(I) = 0{,}198$

La « valeur prédictive positive du test » est 0,198.

d. On calcule $p(\bar{I} \cap T) + p(I \cap \bar{T})$:

$p(\bar{I} \cap T) + p(I \cap \bar{T}) = p(\bar{I}) \times p_{\bar{I}}(T) + p(I) \times p_I(\bar{T})$

$p(\bar{I} \cap T) + p(I \cap \bar{T}) = 0{,}996 \times 0{,}016 + 0{,}004 \times 0{,}008$

$p(\bar{I} \cap T) + p(I \cap \bar{T}) = 0{,}016$

La probabilité que ce test donne une information erronée est de 0,016

Partie B

3. a. On répète 100 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. Le succès « la vache présente un test positif » a une probabilité de 0,02. La variable aléatoire X qui compte le nombre de vaches ayant un test positif dans cet échantillon suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

   b. On calcule $p(X = 3)$:

   $p(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1 - 0.02)^{97}$

   $p(X = 3) = 0{,}182$

   La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est de 0,182.

   c. On calcule $p(X \leq 3)$:

   Directement à la calculatrice on a $p(X \leq 3) = 0{,}859$

   La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est de 0,859.

4. On souhaite $p(X \geq 1) \geq 0{,}99$
   ⇔ $1 - p(X = 0) \geq 0{,}99$
   ⇔ $p(X = 0) \leq 0{,}01$
   ⇔ $\binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times 0{,}98^n \leq 0{,}01$
   ⇔ $0{,}98^n \leq 0{,}01$
   ⇔$\ln(0{,}98^n) \leq \ln(0{,}01)$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$
   ⇔ $n \times \ln 0{,}98 \leq \ln(0{,}01)$
   ⇔$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0.98}$
   ⇔ $n \geq 228$

   La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est de 228.

Exercice 2

1. a. On lit $f'(1)$ car le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente.
   $f'(1) = 2$, le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1 est 2.

   b. f est convexe quand f' est croissante. f est convexe sur $[7{,}4\ ;\ +\infty[$.

2. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (2 - \ln x) = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
   La courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.

3. On résout $f(x) = 0$ (1)

(1) ⇔ $(2 - \ln x) \times \ln x = 0$

(1) ⇔ $2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0$

(1) ⇔ $\ln x = 2$ ou $\ln x = 0$

(1) ⇔ $x = e^2$ ou $x = 1$

L'ensemble solution de l'équation (1) est $S = \{1 ; e^2\}$

C coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(1; 0)$ et $(e^2; 0)$.

4. a. f est définie et dérivable sur]0 ;+∞[comme produit de deux fonctions logarithme népérien définies et dérivables sur]0 ;+∞[.

$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{-\ln x + 2 - \ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$

b. Pour tout $x > 0, f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$

$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow x \leq e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

$f(e) = (2 - \ln e) \times \ln e = (2 - 1) \times 1 = 1$

5. f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$

Pour tout $x > 0, x^2 > 0$ donc $f''(x)$ et $(\ln x - 2)$ ont le même signe.

$\ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$

Donc $f''(x)$ est positive sur [e^2 ; +∞[et f est convexe sur [e^2 ; +∞[.

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

f'' s'annule en changeant de signe au point d'abscisse e^2

$$f(e^2) = (2 - \ln e^2) \times \ln e^2 = 0$$

C admet un point d'inflexion de coordonnées (e^2 ; 0).

Exercice 3

1. $u_2 = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1}\right)u_1 = \frac{1}{e} \times 2 \times \frac{1}{e} = \frac{2}{e^2}$
   $u_3 = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2}\right)u_2 = \frac{1}{e} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^3}$

2.

L_1	def suite(n) :
L_2	u=1/e
L_3	for i in range (1, n) :
L_4	u = 1/e*(1+1/i)*u
L_5	return u

3. a. Pour tout entier naturel n non nul on a :
   $n \geq 1$
   $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse sur]0 ;+∞[
   $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ et $2 \leq e$
   donc $1 + \frac{1}{n} \leq e$

   b. On sait que les termes de la suite sont strictement positifs. Etudions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right)}{u_n}$
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   Or $1 + \frac{1}{n} \leq e$
   donc $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1$
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ donc la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est décroissante et tous ses termes sont strictement positifs donc (u_n) est minorée par 0. La suite (u_n) converge.

4. a. Soit la propriété P(n) : $u_n = \frac{n}{e^n}$.
   Initialisation :
   $\frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$ et $u_1 = \frac{1}{e}$ donc P(1) est vraie.

   Hérédité : Supposons P(n) vraie pour un entier naturel $n \geq 1$ c'est-à-dire $u_n = \frac{n}{e^n}$.
   Montrons que $u_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$.

   $u_n = \frac{n}{e^n}$
   $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \frac{n}{e^n}$
   $u_{n+1} = \frac{1 \times (n+1) \times n}{e \times n \times e^n}$
   $u_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$ P(n+1) est vraie.

Conclusion :

La propriété P(n) est vraie au rang 1 et est héréditaire donc $u_n = \frac{n}{e^n}$ pour tout $n \geq 1$.

b. $u_n = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ par croissance comparée.

$\lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ par quotient des limites.

Exercice 4

1. On teste les coordonnées des points dans l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   $3 \times 1 + 2 \times (-3) + 1 - 4 = -6$ donc R n'appartient pas à $\mathcal{P}$.
   $3 \times 1 + 2 \times (2) - 1 - 4 = 2$ donc S n'appartient pas à $\mathcal{P}$.
   $3 \times 1 + 2 \times (0) + 1 - 4 = 0$ donc T appartient à $\mathcal{P}$.
   Réponse c.

2. On calcule : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$ et $AB^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$

$AC^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$ et $BC^2 = 0^2 + 2^2 + (-5)^2 = 29$

On remarque que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc ABC est un triangle rectangle en A.

Réponse d.

3. La droite Δ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$
   $\vec{u}.\vec{n} = -1 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 1 = 0$ donc Δ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.
   Vérifions si l'équations paramétriques de Δ vérifie l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$:
   $3(1-t) + 2(2) - 4 + 3t - 4 = 3 - 3t + 4 - 4 + 3t - 4 = -1 \neq 0$
   La droite Δ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$. Réponse d.

4. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

$$20 = \sqrt{20} \times \sqrt{29} \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{20}{\sqrt{20} \times \sqrt{29}}$$
$$\widehat{ABC} = 34°$$

   Réponse a.

5. On remarque que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont des vecteurs normaux colinéaires. Ils sont donc strictement parallèles.

   Réponse b.