Baccalauréat Métropole 11 septembre 2023

Sujet 1

Exercice 1

1. f est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 - 3$. Ainsi $u'(x) = 2x$ et $f(x) = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-3})$.
   Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-3}$. Réponse d.

2. $u_n = e^{2n+1} = e^1 \times e^{2n} = e \times (e^2)^n$. On reconnait $u_n = u_0 \times q^n$. Donc (u_n) est géométrique de raison e^2. Réponse c.
3. La boucle WHILE contient la condition contraire à ce que l'on cherche.
   « while $u <= 10\,000$: » . Réponse a (même si le symbole ≤ n'est pas du langage Python).
4. $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1{,}2u_n + 12 + 60 = 1{,}2(v_n - 60) + 72 = 1{,}2v_n - 72 + 72 = 1{,}2v_n$
   La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2. Réponse b.

Exercice 2

1.a. A, B et C définissent un plan ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-1-0\\2+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\-2-0\\-1+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{0}{3}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C définissent un plan.

1.b (CD) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-2\\-1+2\\-2+1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2 \times 2 - 1 \times 1 + 3 \times (-1) = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 2 - 2 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux.

Ainsi (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

C est donc le projeté orthogonal de D sur $\mathcal{P}$.

1.c Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et A appartient à $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne du plan est :

$$2x + 1y - 1z + c = 0$$

$A(1; 0; -1)$ vérifie l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$. On en déduit c :

$2 \times 1 + 1 \times 0 - 1 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c = -3}$

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y - z - 3 = 0$.

2a. <u>Calcul de CD :</u>

$CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\mathbf{6}}$

2.b. (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et C appartient au plan $\mathcal{P}$. Donc CD est la plus courte distance entre D et le plan $\mathcal{P}$ et CD $=\sqrt{6}$. Il n'existe donc pas de point M différent de C tel que $MD = \sqrt{6}$.

3.a. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si son équation paramétrique vérifie l'équation cartésienne du plan.

$2(0) + (2 + t) - (-1 + t) - 3 = 2 + t + 1 - t - 3 = 0$

Donc Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

3.b. H est le projeté orthogonal de D sur la droite Δ. Donc $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ.

$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 4-0 \\ -1-(2+t) \\ -2-(-1+t) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 4 \\ -3-t \\ -1-t \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après l'équation paramétrique de Δ.

$\vec{u}.\overrightarrow{HD} = 0$

$0 \times 4 + 1 \times (-3 - t) + 1 \times (-1 - t) = 0$

$-3 - t - 1 - t = 0$

$-4 - 2t = 0$

$t = -2$

3.c. H étant le projeté orthogonal de D sur Δ, la distance HD est la distance entre D et Δ.

Déterminons les coordonnées de H à partir de l'équation paramétrique de Δ avec $t = -2$:

$$H(0; 2-2;\ -1-2) \qquad H(0; 0;\ -3)$$

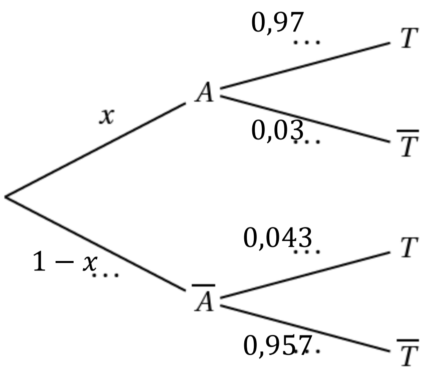
Ainsi , $HD = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-0)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

La distance entre D et Δ est de $3\sqrt{2}$.

Exercice 3

Partie A

1.



2. a. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(T) = p(A \cap T) + p(\bar{A} \cap T)$$

$$p(T) = p(A) \times p_A(T) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(T)$$

$$P(T) = x \times 0{,}97 + (1 - x) \times 0{,}043$$

$$p(T) = 0{,}97x + 0{,}043 - 0{,}043x$$

$$P(T) = 0{,}927x + 0{,}043$$

On sait que $p(T) = 0{,}2$

$0{,}927x + 0{,}043 = 0{,}2$

⇔ $0{,}927x = 0{,}157$

⇔ $x = 0{,}169$

La probabilité que l'individu choisi soit allergique est de 0,169.

3. On calcule $p_T(A) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)}$

   $p_T(A) = \frac{0{,}97 \times 0{,}169}{0{,}2}$

   $p_T(A) \approx 0{,}821$

   Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique.

Partie B

1. On répète 150 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. Le succès : « l'habitant est allergique » a une probabilité $p = 0{,}08$.
   Le variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes allergiques suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}08$.

2. $p(X = 20) = \binom{150}{20} \times 0{,}08^{20} \times (1 - 0{,}08)^{150-20} = 0{,}008.$
   La probabilité qu'exactement 20 personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques est de 0,008.

3. Sur Numworks on a directement $p(X \geq 15) = 0{,}220$
   Sinon :
   $p(X \geq 15) = 1 - p(X \leq 14)$
   $p(X \geq 15) = 1 - 0{,}780 = 0{,}220$

   La probabilité qu'au moins 10% des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques est de 0,220.

Exercice 4

Partie A

1. $g(x) = 2 \times \frac{1}{x} - x^{-2} + \ln x$ est dérivable comme somme de fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$.

$g'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - (-2)x^{-2-1} + \frac{1}{x}$

$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{-2x+2+x^2}{x^3}$

Or sur $]0; +\infty[, x^3 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que son dénominateur $(x^2 - 2x + 2)$.

2. (pour éviter d'utiliser le discriminant, on peut donner la forme canonique du trinôme, somme de deux termes positifs)

$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$

$(x - 1)^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$ donc $g'(x) > 0$ et g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. $g(0,5) \approx -0.69$ et $g(1) = 1$

La fonction g est continue et strictement croissante sur [0,5 ; 1].

$g(0,5) \times g(1) < 0$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

4. La fonction $g(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en α. Elle est donc négative sur $]0 ; \alpha]$ et positive sur $[\alpha ; +\infty[$.

Partie B

1. f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.
   $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

   $f''(x) = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$
   $f''(x) = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$
   $f''(x) = e^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$ pour tout $x > 0$

2. D'après la partie A, $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$. Ainsi $f''(x) = e^x \times g(x)$.
3. a. Etude du signe de f :
   $e^x > 0$ pour tout $x > 0$ et $\ln x = 0$ $pour$ $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
e^x	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b. D'après la question 2, $f''(x) = e^x \times g(x)$.
Or $e^x > 0$ pour tout $x > 0$ et $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$ d'après la partie A.
Donc $f''(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Ainsi $f''(x)$ s'annule en changeant de signe une unique fois en α.
Donc C_f admet un unique point d'inflexion $A(\alpha; f(\alpha))$.

c. De ce qui précède, on a :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	concave	‖	convexe	

4. a. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Par produit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b. On a $g(\alpha) = 0 \quad (1)$
(1) $\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0$
(1) $\Leftrightarrow \ln\alpha = -\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$
(1) $\Leftrightarrow \ln\alpha = -\frac{2\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$
(1) $\Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}$

Et $f'(\alpha) = e^\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \ln\alpha\right)$
d'où $f'(\alpha) = e^\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right)$
$f'(\alpha) = e^\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha^2} + \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right)$
$f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$

c. On sait que $\frac{e^\alpha}{\alpha^2} > 0$ (quotient de deux nombres strictement positifs) et que $0{,}5 < \alpha < 1$ (question 3 partie A)
donc $1-\alpha > 0$
Par produit, on en déduit que $\frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha) \geq 0$ i.e. $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

d. Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$