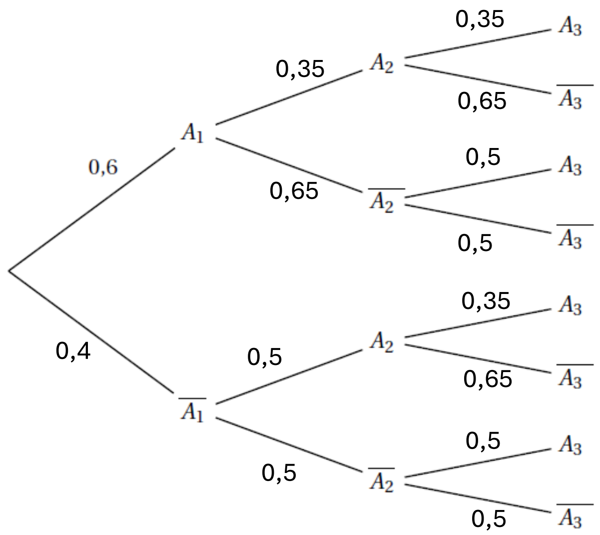
Baccalauréat Amérique du Sud – 27 septembre 2023

Exercice 1

Partie A

1. On prend les informations dans l'ordre dans lequel elles sont énoncées.



2. On calcule $P(A_1 \cap A_2 \cap A_{\bar{3}}) + P(A_1 \cap A_{\bar{2}} \cap A_3) + P(A_{\bar{1}} \cap A_2 \cap A_3)$
   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_{\bar{3}}) + P(A_1 \cap A_{\bar{2}} \cap A_3) + P(A_{\bar{1}} \cap A_2 \cap A_3) =$
   $0{,}6 \times 0{,}35 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}65 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}35 =$
   $0{,}1365 + 0{,}195 + 0{,}07 =$
   $0{,}4015$
   La probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,401 5.

3. a. La somme des probabilités de la loi de probabilités est égale à 1. $P(X = 2)$ a été calculée à la question précédente. On en déduit $P(X = 1)$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i\ )$	0,1	0,425	0,4015	0,0735

b. $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}425 + 2 \times 0{,}4015 + 3 \times 0{,}0735$
   $E(X) = 1{,}4485$

c. En moyenne, un joueur atteint sa cible 1,4485 fois sur 3.

Partie B

1. a . On répète 15 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. Le succès : « le joueur est gagnant à ce jeu » a une probabilité de 0,0735. LA variable aléatoire Y qui compte le nombre de joueurs gagnants suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}0735$

   b. $P(Y = 5) = \binom{15}{5} \times 0{,}0735^5 \times (1 - 0{,}0735)^{10}$

   $P(Y = 5) = 0{,}003$

   La probabilité qu'exactement 5 joueurs soient déclarés gagnants à ce jeu est de 0,003.

2. On résout $P(Y \geq 1) \geq 0{,}98$
   $P(Y \geq 1) \geq 0{,}98$
   $\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}98$
   $\Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0{,}02$
   $\Leftrightarrow \binom{15}{0} \times 0{,}0735^0 \times (1 - 0{,}0735)^n \leq 0{,}02$
   $\Leftrightarrow 0{,}9265^n \leq 0{,}02$
   $\Leftrightarrow \ln(0{,}9265)^n \leq \ln(0{,}02)$
   $\Leftrightarrow n \times \ln 0{,}9265 \leq \ln 0{,}02$
   $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0.9265)}$ par quotient avec un nombre négatif
   $\Leftrightarrow n \geq 52$ valeur arrondie au premier entier immédiatement supérieur.

   Au minimum, 52 personnes doivent se présenter à ce jeu pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

<u>Exercice 2</u>

1. A, B et C définissent un plan si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires :

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-1 \\ -3+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ -1+4 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires et les points A, B et C définissent un plan.

2. a. $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
   $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
   $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = -1 - 2 + 3 = 0$
   $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal au plan.

Ainsi on a $x + y + z + d = 0$

Le point C appartient au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

$$0 - 1 - 1 + d = 0$$
$$d = 2$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.

3. a. Le point Ω(1 ;1 ;2) appartient au plan (ABC) si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

$$1 + 1 - 2 + 2 \ = \ 2$$

Les coordonnées de Ω ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC) donc Ω n'appartient pas au plan (ABC).

b. Déterminons l'équation paramétrique de la droite (ΩH). Comme H est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC), (ΩH) est orthogonal au plan (ABC). Ainsi $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (ΩH).

$$(\Omega H) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$$

H appartient à la fois au plan (ABC) et à la droite (ΩH) donc ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \\ 1 + t + 1 + t + 2 + t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \\ 6 + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \\ y = 1 - 2 \\ z = 2 - 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point H, projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) sont $H(-1; -1; 0)$.

4. H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) donc ΩH est la plus courte distance entre le plan (ABC) et le centre Ω de la sphère S. Ainsi tout point N de (ABC) distinct de H est telle que ΩN > ΩH. Donc N n'appartient pas à la sphère S.

5. Calculons KΩ :

$$K\Omega = \sqrt{(1-3)^2 + (1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

KΩ est égal au rayon de la sphère S donc K appartient à la sphère S

Vérifions que K(3 ; 3 ; 0) appartient au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$

$$3 + 3 - 0 - 6 \; = \; 6 - 6 \; = \; 0$$

Les coordonnées de K vérifient l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ donc K appartient à ce plan.

Ainsi $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{\mathcal{P}} \cap \boldsymbol{S}$

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'après l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

et $\overrightarrow{\Omega K}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{\Omega K}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{\Omega K} = 2\overrightarrow{n_1}$

Donc **(ΩK) est perpendiculaire au plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$**.

Les deux conditions étant remplies, $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On résout le système formé par les deux équations cartésiennes des plans (ABC) et $\mathcal{P}$.

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + z + 2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = -4 \end{cases}$$

En posant $y = t,\ t \in \mathbb{R}$, on a une équation paramétrique de (Δ) : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = -4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 3</u>

1. $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6$
   $u_1 = 5 \times 0 - 8 \times 0 + 6$
   $u_1 = 6$

   $u_2 = 5 \times u_1 - 8 \times\times 1 + 6$
   $u_2 = 5 \times 6 - 8 + 6$
   $u_2 = 28$

2. On spécifie la valeur du premier terme et on donne la formule de récurrence de la suite dans la boucle For

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range (1,n+1) :
        u = 5*u-8*(i-1)+6
    return u
```

3. a. Soit la proposition P(n) : $u_n \geq 2n$

<u>Initialisation :</u>
$u_0 = 0$ et $2 \times 0 = 0$
ainsi $u_0 \geq 0$
donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité :</u>
Supposons que la propriété soit vraie à un rang n c'est-à-dire $u_n \geq 2n$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 2n+2$.

Par hypothèse de récurrence :

$$u_n \geq 2n$$
$$5u_n \geq 10n$$
$$5u_n - 8n \geq 2n$$
$$5u_n - 8n + 6 \geq 2n + 6$$
$$u_{n+1} \geq 2n + 6$$

et $2n + 6 \geq 2n + 2$ donc par transitivité :

$$u_{n+1} \geq 2n + 2$$

P(n+1) est vraie.

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $u_n \geq 2n$ pour tout entier naturel n.

b. $\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geq 2n$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c. La suite (u_n) tend vers +∞ et , par définition d'une limite infinie, s'il existe au moins un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n vérifiant $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors la suite diverge vers +∞.

4. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n$
$u_{n+1} - u_n = 4u_n - 8n + 6$

Or : $u_n \geq 2n$
$4u_n \geq 8n$
$4u_n - 8n + 6 \geq 6$
$u_{n+1} - u_n \geq 6$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suie (u_n) est strictement croissante.

5. a. On remarque qu'un terme de la suite sont obtenue en multipliant par 5 le terme précédent. Il semble que $v_{n+1} = 5v_n$ et $v_0 = 1$.

   Démontrons cette conjecture :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1$
   $v_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1$
   $v_{n+1} = 5u_n - 10n + 5$
   $v_{n+1} = 5(u_n - 2n + 1)$
   $v_{n+1} = 5v_n$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$.

   b. La forme explicite de v_n, pour tout entier naturel n, est :
   $$v_n = v_0 \times q^n$$
   $$v_n = 1 \times 5^n$$
   $$v_n = 5^n$$

   De plus, $u_n = v_n + 2n - 1$
   ainsi $u_n = 5^n + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 4</u>

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. f est de la forme $\ln(u) + v$
$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{4}$$
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} + \frac{1}{4}$$
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-4 + e^x + 1}{4(e^x + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$$

b. Sur $\mathbb{R}$: on a $4 > 0$ et $e^x + 1 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $e^x - 3$
$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\ln 3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\ln 3) = \ln\left(1 + e^{-ln3}\right) + \frac{1}{4} \times \ln 3$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\ln 3$$
$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4}\ln 3 \ = \ln 4 - \ln 3 + \frac{1}{4}\ln 3 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 3$$

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$ et croissante sur $[\ln 3\ ; +\infty[$.

(Remarque : il n'est pas demandé de construire le tableau de variation et il n'est donc pas nécessaire d'exprimer $f(\ln 3)$ ni même de déterminer la limite de f en $-\infty$).

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur [2 ;5].
$f(2) \approx 0{,}63$ et $f(5) \approx 1{,}26$
$f(2) \leq 1 \leq f(5)$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [2 ;5].

Partie B

1. $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ et $e^x > 0$ par propriété de la fonction exponentielle et $(e^x + 1)^2 > 0$ par propriété du carré pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   donc $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

b. On déduit de la question précédente que f'' est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi la courbe représentative de la fonction f est toujours située au-dessus de ses tangentes et en dessous de l'arc formé entre 2 points de la courbe.
Donc C_f est situé au dessus de (PQ) et en dessous de (MN).
Ainsi la portion de la courbe C_f sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

2. a. $f(-\alpha) = \ln(1+e^{\alpha}) - \frac{1}{4}\alpha$
$f(-\alpha) = \ln\left(1+\frac{1}{e^{-\alpha}}\right) - \frac{1}{4}\alpha$
$f(-\alpha) = \ln\left(\frac{e^{-\alpha}+1}{e^{-\alpha}}\right) - \frac{1}{4}\alpha$
$f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha}+1) - \ln(e^{-\alpha}) - \frac{1}{4}\alpha$
$f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha}+1) + \alpha - \frac{1}{4}\alpha$
$f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha}+1) + \frac{3}{4}\alpha$

b. Déterminons la pente de la droite (PQ). C'est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 i.e. $f'(0)$.
$f'(0) = \frac{e^0-3}{4(e^0+1)}$ soit $f'(0) = \frac{1-3}{4(1+1)} = -\frac{1}{4}$

Déterminons la pente p de la droite (MN) :

$$p = \frac{f(-\alpha)-f(\alpha)}{-\alpha-\alpha}$$

$$p = \frac{\ln(e^{-\alpha}+1) + \frac{3}{4}\alpha - \left(\ln(1+e^{-\alpha}) + \frac{1}{4}\alpha\right)}{-2\alpha}$$

$$p = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{-2\alpha}$$

$$p = -\frac{1}{4}$$

On remarque que $f'(0) = p$ donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
Le quadrilatère MNQP est donc un parallélogramme.